

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тихоокеанский государственный университет»

На правах рукописи



Попов Александр Николаевич

Диссертационная работа на тему

**«МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ КАК ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ»**

Специальность 2.1.9. — Строительная механика

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Руководитель: д.т.н. Ловцов Александр Дмитриевич

Хабаровск 2025 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ И МЕТОДОВ РАСЧЁТА КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	13
1.1. ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СТАНОВЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ И РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЁТА.....	13
1.2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ	15
1.3. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	16
1.4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ	21
ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ.....	23
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ	
ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ.....	25
2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ	28
2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СИЛАХ ТРЕНИЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ	
ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ.....	29
2.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ	33
2.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ С	
УЧЁТОМ ЗАЗОРОВ	36
ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ.....	39
ГЛАВА 3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРОГРАММНАЯ	
РЕАЛИЗАЦИЯ	41
3.1. МЕТОД ЛЕМКЕ	41
3.2. НУЛЬ-ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КОНТАКТНОЙ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ И КОНТАКТНОГО ГРУЗОВОГО ВЕКТОРА	49
3.3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ЛЕМКЕ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ.....	55
3.3.1. Алгоритм решения линейной задачи дополнителъности для общего случая контакта с	
искусственно введённым обжатием.	57
3.3.2. Алгоритм решения линейной задачи дополнителъности для общего случая контакта с	
нарастающим параметром внешнего воздействия	71
ВЫВОДЫ ПО ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ.	81
ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	82
4.1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ	82
4.2. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ	85
4.3. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ С ANSYS	89
4.4. РАСЧЁТ ВОДОПРОПУСКНОЙ ТРУБЫ В НАСЫПИ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ	102
4.5. РАСЧЁТ ПОДПОРНОЙ СТЕНКИ.....	107
ВЫВОДЫ ПО ЧЕТВЁРТОЙ ГЛАВЕ.	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	115
ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ	134
ПРИЛОЖЕНИЕ В. СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС	138
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. ПРОГРАММА CONTACTLSP.....	139

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ЛЗД – линейная задача дополнительности;

КМЖ – контактная матрица жёсткости, $\mathbf{R}$;

КГВ – контактный грузовой вектор, $\mathbf{R}_F$;

НДС – напряжённо-деформированное состояние;

МП – метод перемещений;

контактная пара –предполагаемые точки контакта двух тел;

f – коэффициент трения между контактирующими телами;

m – число контактных пар в системе;

$\mathbf{x}$ – вектор усилий взаимодействия;

$\mathbf{X}_n$ – вектор *усилий* взаимодействия по *нормали* к зоне контакта;

$\mathbf{X}_\tau$ – вектор *усилий* взаимодействия по *касательной* к зоне контакта;

X_{ni} – *усилие* взаимодействия по *нормали* к зоне контакта в i контактной паре;

$X_{\tau i}$ – *усилие* взаимодействия по *касательной* к зоне контакта в i контактной паре;

$x_{\tau i}^+$ – «резерв сцепления» контактной пары i при тенденции (попытке) смещения из недеформированного состояния по направлению $Z_{\tau i} > 0$ по касательной к зоне контакта;

$x_{\tau i}^-$ – «резерв сцепления» контактной пары i при попытке смещения из недеформированного состояния по направлению $Z_{\tau i} < 0$ по касательной к зоне контакта;

$\mathbf{z}$ – вектор взаимных перемещений;

$\mathbf{Z}_n$ – вектор взаимных *перемещений* по *нормали* к зоне контакта;

$\mathbf{Z}_\tau$ – вектор $[m \times 1]$ взаимных *перемещений* контактных пар по *касательной* к зоне контакта;

Z_{ni} – взаимные *перемещения* по *нормали* к зоне контакта в i контактной паре;

Z_{ti} – взаимные *перемещения по нормали* к зоне контакта в i контактной паре; Z_t – вектор взаимных *перемещений по касательной* к зоне контакта;

Z_{ti}^+ – взаимное перемещение точек контактной пары i в положительном направлении по касательной к зоне контакта;

Z_{ti}^- – взаимное перемещение точек контактной пары i в отрицательном направлении по касательной к зоне контакта;

$\mathbf{r}_f$ – вектор предельных сил трения;

$\mathbf{R}_{nn}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей в контактных парах *по нормали* к зоне контакта от единичных дислокаций узлов контактных пар *по нормали* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{\tau\tau}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей, введённых в контактных парах *по касательной* к зоне контакта от единичных дислокаций контактных пар *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{n\tau}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей *по нормали* от единичных дислокаций *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{nn}$ – контактная матрица жесткости $[m \times m]$ для связей *по касательной* от единичных дислокаций *по нормали* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{Fn}$ – КГВ $[m \times 1]$ для связей по нормали к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{F\tau}$ – КГВ для связей по касательной к зоне контакта;

$\mathbf{R}_c$ – грузовой вектор в начальной таблице метода Лемке от постоянной нагрузки;

$\mathbf{R}_v$ – грузовой вектор в начальной таблице метода Лемке от переменной нагрузки;

$\boldsymbol{\eta}$ – вектор начальных зазоров в контактных парах;

η_i – начальный зазор в i контактной паре;

p – параметр расширения задачи метода Лемке (физическое значение – «пригруз»/искусственное обжатие);

$\mathbf{e}$ – вектор $[n \times 1]$, со всеми компонентами равными единице.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В диссертационной работе рассматриваются конструктивно-нелинейные задачи контактного взаимодействия деформируемых тел. В строительных конструкциях такие задачи возникают, например, при расчете гидротехнических сооружений, фундаментов (свайных, висячих и ленточных), подпорных стен, шпунтовых ограждений, водопропускных труб, опор трения, кинематических опор сейсмоизолированных зданий и во многих других случаях. Учет контактного взаимодействия с трением между деформируемыми элементами строительных конструкций имеет важное значение для определения усилий и напряжений в конструкциях.

Существующие программные комплексы, такие как ANSYS и ABAQUS, используют для решения контактных задач следующие методы:

- Pure Penalty (Штрафные функции). Демонстрирует быструю сходимость, однако приводит к взаимопроникновению контактирующих тел;
- Method of Lagrange Multipliers (Множители Лагранжа). Обеспечивает отсутствие взаимопроникновения, но появляется сложность в обеспечении сходимости решения;
- Augmented Lagrange (Обобщенный метод Лагранжа). Представляет собой модификацию метода Pure Penalty с коэффициентами Лагранжа, что позволяет уменьшить взаимопроникновение в областях концентраторов усилий.

Эти методы имеют неустранимый недостаток – присутствие в них заранее заложенной погрешности решения. Стремление уменьшить эту погрешность приводит к увеличению количества итераций и к вероятности заикливания итерационного процесса или осцилляции получаемого решения.

Для работы этих методов необходимо настраивать ряд параметров, таких как: предельное взаимопроникновение тел, предельное значение упругого проскальзывания, жесткость контактных элементов, частота обновления жесткости контакта, количество шагов алгоритма и т.п. Корректная настройка этих

параметров позволяет обеспечить приемлемую точность получаемого решения и сходимость алгоритма как по перемещениям, так и по усилиям в зоне контакта, однако требует высокой квалификации пользователя и знаний особенностей используемых алгоритмов решения.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью совершенствования методов расчёта, позволяющих избавиться от проблем сходимости итерационного процесса при точном учёте условий контакта и не требующих высокой квалификации конечного пользователя

Степень разработанности темы исследования.

Постановка задач контактного взаимодействия получила своё начальное развитие в работах таких учёных, как Синьорини А., Фикера Г., Дюво Г., Lions J.-L., Гольштейн Р.В., Glowinski R., Trémolières R., Кравчук А.С., Розин Л.А., Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. и др. Эти исследователи заложили основы теории контактных задач в механике деформируемых тел, уделяя особое внимание моделированию контакта между телами, в том числе с учётом трения.

Значительный вклад в развитие алгоритмов и методов решения контактных задач внесли Вовкушевский А.В., Кравчук А.С., Панагиотопулос П.Д., Glowinski R. и Lions J.-L. Они разработали эффективные численные методы, базирующиеся на вариационных принципах и методах конечных элементов, что позволило решить широкий круг сложных контактных задач.

Работы Glowinski R., Lions J.-L. и Trémolières R. сыграли ключевую роль в развитии численных методов решения задач контакта на основе вариационных неравенств. Эти методы остаются основой современных подходов к решению задач контактного взаимодействия.

Решение задач контакта с трением остаётся важной и активно развивающейся областью исследований. Среди авторов в этой области можно отметить Бокей И.Б., Вовкушевского А.В., Дурнева В.А., Колесникова Г.Н., Кравчука А.С.,

Ловцова А.Д., Лукашевича А.А., Розина Л.А., Станкевича И.В., Aleksandrov V.M., Aydinoglu A., Barboteu M., Bathe K.J., Fazlyab M., Kalker J.J. и др.

Отметим Acary V., Brémond M., Raous M. и Sofonea M. как современных авторов обширных обзоров постановок контактных задач и методов их решения. Как показано в исследованиях, существует много постановок задач одностороннего контакта с трением и алгоритмов их решения, что позволяет сделать вывод об отсутствии единого подхода к решению задач контакта с трением. Более чем 40 лет назад появились первые работы по численному решению задач механики контакта с трением, однако активные исследования по этой теме все еще ведутся. Это можно объяснить тем, что задачи контакта с трением трудно поддаются численному решению, а математические результаты сходимости численных алгоритмов редки и большинство из них требуют довольно сильных допущений.

Линейная задача дополненности (ЛЗД) возникла в математическом программировании и применялась к задачам оптимизации. Важный вклад в развитие методов решения ЛЗД был внесён такими учёными как Cottle R.W., Lemke C.E., Sargent R.W. и др. Позднее ЛЗД нашла применение в механике, включая задачи одностороннего контакта. Важный вклад в применение ЛЗД для решения задач контактного взаимодействия деформируемых тел внесли такие учёные, как Ким Т.С., Kwak B.M., Pang J.S. и др.

В настоящее время ЛЗД широко используется для решения задач одностороннего контакта. Вклад в её применение в контактных задачах внесли такие исследователи, как Аверин А.Н., Колесников Г.Н., Пузаков А.Ю., Фёдорова Н.В., а также зарубежные учёные, такие как Achik Y., Dubey D., Evers J., Figueiredo F.C., Flores P., Gao H., Li Y., Zhang Y., Liao L., Ma S., Wang T. и др.

Постановки задач контакта деформируемых тел в виде ЛЗД показали свою эффективность в задачах идеального контакта (когда не учитываются силы трения) или в задачах с известными предельными силами трения (когда прижимающие силы постоянны). К преимуществам методов решения ЛЗД относят:

1) возможность использования шаговых алгоритмов, что позволяет получить решение за конечное число шагов; 2) точное удовлетворение условий контакта.

Общий случай решения контактной задачи деформируемых тел в виде ЛЗД, когда учитываются силы трения и прижимающие силы меняются в процессе деформирования, не рассматривался.

В целом, можно констатировать, что несмотря на большое количество работ в области расчёта конструктивно-нелинейных задач, степень разработанности методов решения контактных задач с трением недостаточна. Задача контакта деформируемых тел с трением представляет собой важную и сложную область исследований и требует развития как в теоретическом, так и практическом плане. Применение линейной задачи дополненности и методов её решения открывает новые возможности для более простого и эффективного моделирования контактного взаимодействия деформированных тел.

Объект исследования – контакт с трением деформируемых строительных конструкций или их частей.

Предмет исследования – постановка задачи контактного взаимодействия как линейной задачи дополненности, разработка шаговых алгоритмов решения этой задачи.

Цель диссертационного исследования заключается в совершенствовании подходов к решению конструктивно-нелинейных задач контакта с трением между деформируемыми телами путём разработки метода решения, позволяющего определить контактные усилия взаимодействия и взаимные перемещения в области контакта деформируемых тел с постановкой задачи контакта с трением в виде линейной задачи дополненности.

Задачи исследования:

- 1) Провести анализ существующих методов решения контактных задач деформируемых тел с трением. Проанализировать существующие методы

решения контактных задач в виде ЛЗД, оценить их применимость для решения контактных задач с трением.

- 2) Разработать новый метод расчёта контактной задачи с трением, когда между деформируемыми телами заранее неизвестны области отрыва и контакта, а внутри области контакта неизвестны области сцепления и скольжения. Сформулировать новую постановку проблемы в смысле метода перемещений строительной механики как ЛЗД, и разработать алгоритмы её решения.
- 3) Программно реализовать предложенный метод. Провести тестирование разработанного метода на сложных для контактных алгоритмов задачах. Сравнить полученные результаты с аналитическими результатами и численными результатами, полученными другими методами, выявить особенности работы алгоритмов и оценить их эффективность.

Научная новизна работы заключается в следующем:

Разработан метод решения задач одностороннего контакта с трением между деформируемыми телами. В методе используется новая эвристическая постановка задачи одностороннего контакта с трением в виде линейной задачи дополненности, полученная с использованием метода перемещений строительной механики.

Разработаны модификации алгоритма Лемке решения ЛЗД, интерпретируемые как: алгоритм с искусственным обжатием; алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия. С помощью вышеуказанных алгоритмов можно гарантированно получить решение для дискретизованных задач за конечное число шагов и точно выполнить условия взаимонепроникновения контактирующих тел.

Выявлены особенности решения контактных задач с трением в виде ЛЗД и показаны на модельных задачах.

Методология и методы исследования. В диссертационном исследовании использовались основные методы строительной механики, общепринятые в ней

гипотезы, методы решения линейных систем уравнений и неравенств, линейной алгебры и теории упругости, работы по теории расчёта систем с односторонними связями в формулировке линейной задачи дополненности.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием корректных математических моделей и методов, а также совпадением решений, полученных с помощью разработанных алгоритмов, с точными решениями и решениями, полученными в известных программных комплексах. Результаты можно считать достоверными для класса задач с трением, когда скользящие точки контакта деформируемых тел не переходят в состояние сцепления.

Научные положения и результаты, выносимые на защиту:

- 1) Постановка задачи одностороннего контакта с трением для деформированных тел в форме линейной задачи дополненности с использованием метода перемещений строительной механики.
- 2) Алгоритмы решения контактной задачи с трением в форме линейной задачи дополненности: алгоритм с искусственно введённым обжатием и алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия.
- 3) Программная реализация и верификация разработанных алгоритмов решения контактных задач, сравнение с аналитическими и численными результатами решения.

Практическая значимость работы определяется следующим.

Для решения контактных задач с трением разработаны эффективные алгоритмы, обеспечивающие расчет в условиях, когда одно или несколько контактирующих тел способны перемещаться как жесткое целое. Шаговый процесс полученных алгоритмов не приводит к осцилляции решения при наличии зон контакта с силами трения, близкими или равными предельным по всей зоне контакта.

Предлагаемый метод решения упрощает процесс расчета контактных задач с трением, снижая требования к квалификации пользователя и облегчая его

применение на практике. Новый метод требует указать только коэффициент трения.

Новая постановка контактной задачи и разработанные алгоритмы её решения легко интегрируются в современные программные комплексы, предназначенные для расчёта дискретизированных систем, использующих, например, метод конечных элементов или метод граничных элементов.

Созданы и программно реализованы алгоритмы расчета контактных задач, которые могут быть использованы в учебном процессе, проектных институтах и исследовательских лабораториях. На программную реализацию разработанного алгоритма получены свидетельства об официальной регистрации программы № 2022669000 «Contact LCP».

Теоретическая значимость заключается в постановке конструктивно-нелинейной задачи одностороннего контакта с трением в форме линейной задачи дополненности; в разработке новых методов расчёта контактных задач с трением.

Личный вклад автора состоит в получении эвристической постановки задачи контакта с трением в виде ЛЗД. Разобраны и модифицированы алгоритмы решения ЛЗД. Выявлены особенности решения поставленной задачи, описана интерпретация получаемых результатов. Программно реализованы алгоритмы решения контактной задачи с трением. Проведено тестирование полученных алгоритмов на множестве модельных задач одностороннего контакта с трением.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались на:

- 1) 54-й студенческой научно-технической конференции ТОГУ, Хабаровск, 2014;
- 2) Международной научно-практической конференции: «Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного и дорожно-транспортного комплекса», ТОГУ, Хабаровск, 2016, 2017;
- 3) VII Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Новосибирск, 2018;

4) конференции «90 лет СК СПбГАСУ» секция каф. Железобетонных и каменных конструкций 11 июня 2021;

Достоверность полученных положений и выводов подтверждается следующим:

5) Получено 1 свидетельство об официальной регистрации программ.

6) Полученные результаты (методики, алгоритмы расчёта и данные расчётов) используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «ТОГУ» в курсе «Нелинейные задачи строительной механики», читаемом студентам, обучающимся по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

7) Получены акты о внедрении (использовании) научных результатов работы в ОКР: от 25.04.2024 №16-24 ООО «Лидер Пласт 27»; от 27.06.2024 ООО «ДВПИ».

Публикации. Основные результаты исследований опубликованы в 13 работах, из них: 2 статьи индексируемых в SCOPUS; 5 статьи в журналах, индексируемых в ВАК и RSCI; 2 из них лично автором. Получено 1 свидетельство об официальной регистрации программ № 2022669000 «Contact LCP».

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. *Результаты исследований изложены на 114 страницах машинописного текста, включая 54 рисунка, 28 таблиц, список литературы из 161 наименования.*

ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ И МЕТОДОВ РАСЧЁТА КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Исторические аспекты становления контактных задач и развитие методов расчёта

Исследования контактных задач имеют давнюю историю. Впервые контактная задача была поставлена и решена немецким физиком Генрихом Герцем. Его работа явилась началом целой области науки о контактном взаимодействии упругих тел. Следующее важной работой, наиболее вероятно, является работа Синьорини, носящая его имя, в которой сформулирована задача об идеальном (без трения) контакте жесткого и упругого тел. Следующим важным этапом явилась постановка задач в виде вариационных равенств и неравенств [1–3]. В обзорах [4,5] рассматриваются многообразные задачи, расчетную схему которых можно представить системами с односторонними связями, и указывается на необходимость дальнейшего развития и совершенствования методов расчета таких задач.

О развитии вышеупомянутого вопроса в нашей стране можно судить по сборнику обзоров численно-аналитических методов расчета [6], Кравчука [7], Вовкушевского [8], и других [9–14].

Значительное внимание данному вопросу уделялось в зарубежных публикациях. Наиболее важными из них, на наш взгляд, являются работы Одена с сотрудниками [15–17], Кларбрина с сотрудниками [18,19], Панагиотопулоса [20,21], Куака [22,23], и других [24–27].

Развёрнутый обзор приведен в работе [28], в центре внимания которого находятся публикации по развитию контактных алгоритмов, являющихся частью численных методов решения задач механики сплошной среды, отвечающих за определение, прослеживание и расчет контактных, межфазных и подвижных свободных границ.

Краевые контактные задачи можно сформулировать в дифференциальной, интегральной или вариационной формах [1–3,7,16,19,21,28,29].

Проблема расчета систем с переменными связями для задач строительной механики в нашей стране впервые была поставлена Рабиновичем И.М. [30]. Для решения таких задач стали применять итерационные алгоритмы последовательного уточнения рабочей схемы [30–32], получившие в дальнейшем [33] название алгоритмов Рабиновича. Реализовывать эти алгоритмы можно в форме методов сил, перемещений и смешанного метода [13,14].

Алгоритм метода перемещений (для односторонних связей, работающих на сжатие), например, таков:

- все односторонние связи заменяются двусторонними (либо отбрасываются);
- делается расчет на заданную нагрузку обычными способами строительной механики, и определяются те связи, которые работают на отрыв (сжатие);
- на следующей итерации эти связи отбрасываются (вводятся); тем самым принимается новая рабочая схема, и весь процесс повторяется на следующем шаге с новой рабочей схемой;
- так продолжается до тех пор, пока в рабочей схеме все усилия в односторонних связях не окажутся сжимающими.

Достоинствами такого алгоритма являются простота и быстрая сходимость. Недостатками же являются не доказанность существования решения; нет оценок скорости сходимости.

Некоторые исследователи предпринимали попытку доказательства сходимости такого процесса. Строгое и завершенное доказательство сходимости отсутствует. Этот факт не является случайным, поскольку описанный процесс не обязан сходиться, что следует из примера, приводимого в [33,34].

В работах [13,14] было показано, что система уравнений и неравенств, записанная для дискретизованной системы с односторонними связями, является условиями оптимальности Куна–Таккера задачи условной минимизации

квадратичной формы функционала энергии. С этих пор большинство работ специалистов по строительной механике связано с применением или развитием тех или иных методов квадратичного программирования, т. е., к поиску минимума квадратичной функции при линейных ограничениях в виде равенств и неравенств (задача условной минимизации). Отметим, что при помощи метода множителей Лагранжа или различных вариантов метода штрафа задача может быть сведена к проблеме безусловной оптимизации [2,3,6,16,18,35].

Для решения задач квадратичного программирования активно разрабатывались и применялись итеративные численные методы [13,16,18,36–38], как правило, некоторые из них основаны на модификациях градиентных подходов. К числу таких методов относятся алгоритмы условного градиента [8], методы релаксации [6,7], метод гомотопии [22] и прочие методы. К несомненным достоинствам этих методов относятся единственность получаемого решения и наличие оценок скорости сходимости [39,40]. К недостаткам следует отнести необходимость задания параметра окончания итерационного процесса (недостаток, присущий всем итерационным методам вообще) и медленная сходимость в случае большого количества зон контакта/отрыва [28].

1.2. Численные методы решения задач контакта с трением

Вариационные формулировки, в частности, формулировки контактных задач в виде вариационных неравенств играют важную роль в изучении вопросов корректности начально-краевых задач, существования и единственности решений. Контактные граничные условия рассматриваются как ограничения и включаются в вариационное уравнение с помощью метода множителей Лагранжа или метода штрафных функций. Обзор методов учета ограничений для вариационных задач общего вида имеется в работе [16].

Двойственные вариационные постановки и постановки задач в виде функционалов, аналогичных обобщенным функционалам Треффца [7,8,16,18,21], позволяют резко сократить количество неизвестных дискретизованной задачи. По

сути, неизвестными в этом случае являются силы контактного взаимодействия и взаимные перемещения точек зоны отрыва. Алгоритмически такой подход приводит к использованию контактных матриц жесткости, податливости (в зависимости от используемого вариационного принципа). Использование контактных матриц в разнообразных задачах контакта деформируемых тел показано в [11,16,18,41].

Наиболее часто используемыми численными методами решения контактных задач в виде вариационных неравенств являются методы множителей Лагранжа, метод штрафных функций и их модификации [16,35,38,42,43].

1.3. Современное состояние проблемы решения контактных задач

На сегодняшний день разработка методов решения задач контактного взаимодействия всё так же актуальна. Учёными рассматриваются различные постановки задач одностороннего контакта и методы их решения. Теория контактного взаимодействия должна предсказывать положение области контакта и, в случае учёта трения, зоны сцепления и зоны скольжения внутри области контакта. Часто, при решении контактной задачи необходимо найти усилия взаимодействия и взаимные перемещения точек контактирующих тел. В [44–47] рассматриваются закономерности изменения усилий контактного взаимодействия при увеличении нагрузки.

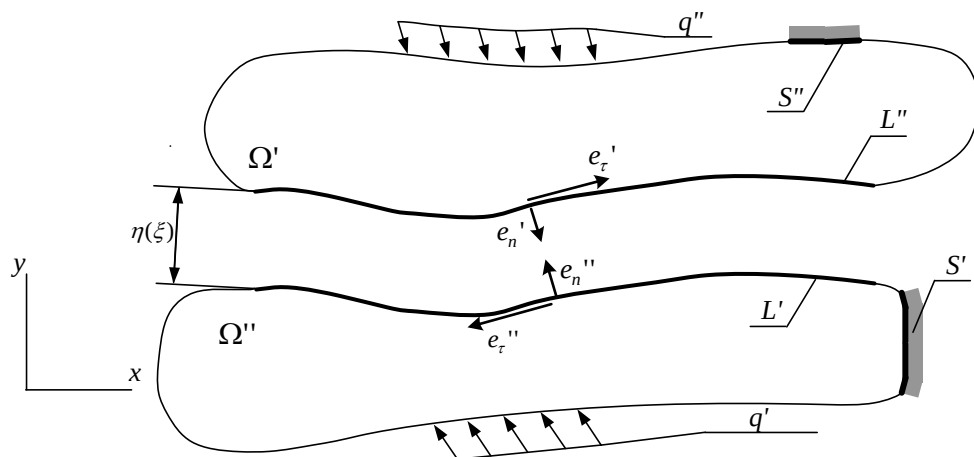
Численный способ решения нелинейной задачи – это сведение задачи одностороннего контакта к последовательному решению линейных задач. Например, метод последовательных догрузений: нагрузка прикладывается по малым шагам. Таким образом, рассматривается итерационный процесс постепенного нагружения, в ходе которого определяется такие решения, при которых удовлетворены все уравнения на границе контактирующих тел. Но для обеспечения сходимости приращение нагрузки должно быть достаточно малым, что может привести к увеличению трудоёмкости решения. Такой подход к

решению хорошо себя показывает, когда необходимо рассчитать параметры НДС на всех этапах нагружения. Описанный подход реализован в работах Лукашевича А.А. [48–51], Мигорски С. и Игнатьева А.В. [52,53].

В современных работах авторы рассматривают односторонние связи в применении к расчёту динамических диссипативных систем с учётом конструктивной нелинейности Потапов А.Н. [54–56]; развивают методы расчёта, используя смешанный метод строительной механики Игнатьев А.В., Бочков М.И. [57–61]; и решают задачи контакта с трением в машиностроении [62–68].

Большое разнообразие научных трудов по моделированию одностороннего контакта можно условно разделить на три категории: 1) задачи идеального контакта; 2) задачи с известными предельными силами трения; 3) задачи общего случая контакта с трением.

Рассмотрим плоскую задачу контакта двух линейно деформируемых тел. Ниже на рисунке показаны деформируемые тела Ω' и Ω'' , имеющие границы L' и L'' на расстоянии $\eta(\xi)$ друг от друга. Нормали e_n' и e_n'' полагаем параллельными друг другу, считая что границы тел практически совпадают; e_τ' и e_τ'' – касательные единичные векторы к поверхности контакта. К телам приложено внешнее воздействие в виде q' и q'' . S' и S'' – кинематическое воздействие.



Для линейно деформируемых тел справедливы соотношения:

1. Дифференциальные уравнения равновесия (статическая сторона задачи):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + q_y = 0;$$

2. Геометрические уравнения (формулы Коши):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};$$

3. Закон Гука:

для плоского напряжённого состояния:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy};$$

для плоской деформации:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-\mu)}((1-\mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-\mu)}((1-\mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},$$

где: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, q_x, q_y – компоненты объёмной силы, u_x, u_y – перемещения, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты тензора деформаций, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона.

Идеальный контакт. Задача, более известная как задача Синьорини, когда отсутствует трение и заранее неизвестны положение и размеры зон контакта и отрыва. Граничные условия на поверхности контакта деформируемых тел в этом случае имеют вид:

$$\sigma_n' = \sigma_n'' = \sigma_n \leq 0,$$

$$u_n - \eta \leq 0; \quad \sigma_n(u_n - \eta) = 0; \quad \sigma_\tau' = \sigma_\tau'' = \sigma_\tau = 0;$$

где: σ_n, σ_τ – напряжения по нормали и по касательной к поверхности контакта L ;

σ_n', σ_n'' – напряжения по нормали к поверхностям L' и L'' ;

$\sigma_\tau', \sigma_\tau''$ – напряжения по касательной к поверхностям L' и L'' ;

$u_n = u_n' + u_n''$ – взаимное сближение контактирующих тел по нормали к поверхности контакта L ;

u_n', u_n'' – перемещения по нормали к поверхностям L' и L'' ;

η – зазор между телами.

Задачу идеального контакта можно поставить в виде условной минимизации дифференцируемого функционала [53,69–78].

Задача с известными предельными силами трения. Предполагается, что известна зона контакта, но неизвестны зоны сцепления и проскальзывания. Граничные условия на поверхности контакта деформируемых тел в этом случае имеют вид:

$$\sigma_n = \text{const};$$

$$|\sigma_\tau| \leq -f \cdot \sigma_n; \quad \sigma_\tau \cdot u_\tau \leq 0;$$

$$\text{если } |\sigma_\tau| < -f \cdot \sigma_n \text{ то } u_\tau = 0;$$

где: $u_\tau = u_\tau' - u_\tau''$ – взаимные перемещения по касательной к поверхности контакта L ; u_τ', u_τ'' – перемещения по касательной к поверхностям L' и L'' ; f – коэффициент трения.

В этом случае задачу можно поставить в виде вариационного неравенства, которое удастся свести к безусловной минимизации недифференцируемого функционала [44,53,79–82].

Общий случай контакта с трением. Предполагается, что заранее неизвестны зона отрыва и зона контакта, а внутри зоны контакта неизвестны зоны сцепления и проскальзывания [49,50,83–99]. Граничные условия на поверхности контакта деформируемых тел в этом случае имеют вид:

условия одностороннего контакта по нормали:

$$\sigma_n \leq 0; \quad u_n - \eta \leq 0; \quad \sigma_n(u_n - \eta) = 0;$$

условия трения Кулона:

$$|\sigma_\tau| < -f \cdot \sigma_n;$$

условия неположительной работы трения:

$$\sigma_\tau \cdot u_\tau \leq 0$$

условие сцепления:

$$\text{если } |\sigma_\tau| < -f \cdot \sigma_n \text{ то } u_\tau = 0;$$

В этом случае задачу также можно поставить в виде вариационного неравенства, но постановки задачи в виде минимума функционала энергии нет [9], [100].

В вышеописанных сценариях одностороннего контакта деформируемых тел, если записать условия контакта через усилия взаимодействия и взаимные перемещения, то задачу можно свести к линейной задаче дополненности (п.1.4).

В большинстве программных комплексов, способных решать контактные задачи, реализованы методы множителей Лагранжа, штрафных функций и их модификации. Для решения конкретных задач большинство авторов рассматривают указанные методы как приоритетные [74,76,84,93,94,101–109]. В указанных алгоритмах допускается относительно небольшое взаимопроникновение контактирующих тел, определяемое дополнительным параметром задачи, который в свою очередь, задаётся пользователем.

Важно также отметить альтернативные методы расчёта контактных задач. Например, методы с использованием контактных конечных элементов [45,48–51,86,110–112], в которых необходимо определять жёсткость этих элементов.

В [77,78] авторы осуществляют поиск области контакта с помощью кусочно-непрерывной функции и, для некоторых частных случаев, получают аналитическое решение. В [87] авторы рассматривают модель одностороннего контакта с трением для жёсткого и деформированного тело по предельному состоянию, в котором зона контакта может не меняться в процессе деформирования. В [107] авторы решают задачу, основываясь на методе обобщённого Лагранжа и используют

разработанный парциальный (partial) метод Ньютона. В [113,114] автор использует конечно-элементную технологию, основанную на смешанной формулировке с применением функционала Рейсснера. В работе [115] рассчитываются балки на упругом основании и физически нелинейные процессы моделируются в смысле односторонних связей. В [70] рассматривается моделирование одностороннего взаимодействия множества тел с высоким уровнем пластических деформаций.

В работах [28,44–47,116,117] приведены обзоры постановок задач одностороннего контакта и их решение. Новые подходы к решению задач, доказательство существования решения рассматривается математиками в работах [46,52,84,95,109,118–122].

Как показано в исследованиях, существует много постановок задач одностороннего контакта с трением и алгоритмов их решения, отсюда можно сделать вывод об отсутствии единого подхода к решению задач контакта с трением. Более чем 40 лет назад появились первые работы по численному решению задач механики контакта с трением, однако активные исследования по этой теме все еще ведутся. Это можно объяснить тем, что задачи контакта с трением трудно поддаются численному решению, а математические результаты сходимости численных алгоритмов редки и большинство из них требуют довольно сильных допущений.

1.4. Линейная задача дополненности

Применение алгоритмов ЛЗД для решения задач контактного взаимодействия в нашей стране мало распространено среди авторов [98,105,123]. Зачастую, как и Колесников Г.Н. [98,105,123] другие авторы рассматривают решение задач идеального контакта. Для решения используют известные итерационные методы с использованием множителей Лагранжа или штрафов. Решения, получаемые шаговыми методами рассматриваются в работах [10,11,91,92,99,124–133].

В основном, применение алгоритмов решения ЛЗД реализуется зарубежными авторами [46,70,73,87,88,90,102,134–142]. Большинство современных зарубежных

статей в применении ЛЗД к решению контактного взаимодействия связано с динамическим взаимодействием двух или нескольких тел [70,88,102,136–141]. В работе [18] проведено сравнение вычислительной эффективности большой группы методов (Лагранжа, штрафа, ЛЗД) и показано, что наиболее эффективные алгоритмы методов Лагранжа на 52% более затратны по времени счета в сравнении с алгоритмами ЛЗД, наиболее эффективные алгоритмы методов штрафа – на 23%. Таким образом, на основе тестирования алгоритмов контактных задач, показано превосходство алгоритмов ЛЗД.

Известно значительное количество типов задач дополнительности и алгоритмов их решения [143]. Данное направление активно развивается за рубежом как математиками [46,116,119], так и прикладниками [44,45], причем алгоритмы задачи дополнительности используются не только для решения контактных задач, но и для задач пластичности [70].

Для решения ЛЗД существует ряд методов. Их можно разбить на 2 группы: итерационные методы (в том числе с использованием машинного обучения) [144,145], шаговые методы [125,130,146–149], позволяющие получить решение за конечное число шагов. Алгоритм Лемке и его модификации являются шаговыми методами и позволяют физически интерпретировать каждый шаг алгоритма. И эта интерпретация не противоречит физической сущности задачи.

Линейная задача дополнительности записывается в виде системы уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{R}_f, \\ \mathbf{x} &\geq 0, \\ \mathbf{z} &\geq 0, \\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{x} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где: $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ – искомые векторы $[n \times 1]$,

$\mathbf{R}$ – заданная квадратная матрица $[n \times n]$,

$\mathbf{R}_f$ – заданный вектор $[n \times 1]$.

В большинстве публикаций, посвященных решению линейной задачи дополнителности, либо исследуются границы применимости метода Лемке, либо предлагаются его обобщения [39,143,147,149–151]. Общий случай решения контактной задачи деформируемых тел в виде ЛЗД, когда учитываются силы трения и прижимающие силы меняются в процессе деформирования, не рассматривался.

Главной отличительной особенностью алгоритмов линейной задачи дополнителности является то, что в случае как положительно определенной, так и полуопределенной матрицы они позволяют получить решение (если оно есть) за конечное число шагов [39,143]. Это и является их главным преимуществом по сравнению с итерационными методами.

Таким образом, задачи **идеального контакта** и **контакта с известными предельными силами трения** могут быть сведены к задаче минимизации функционала энергии. Также эти задачи можно ставить в виде ЛЗД и применять эффективные шаговые алгоритмы решения. Для задачи *общего случая контакта с трением* постановки в виде экстремума функционала нет. В диссертационной работе предлагается сформулировать постановку контактной задачи с трением в виде ЛЗД и рассмотреть шаговые методы её решения.

Выводы по первой главе

Анализ работ, посвященных решению конструктивно нелинейных задач одностороннего контакта деформируемых тел, позволяет сделать следующие выводы:

1. Задачи контакта деформируемых тел для идеального контакта (контакт без трения) и контакта с известными предельными силами трения (когда прижимающие силы постоянны) поставлены в виде задач оптимизации функционала. Для данных постановок доказаны существование и единственность решения, но в общем случае контакта с трением, когда прижимающие усилия в зоне

контакта меняются в процессе деформирования и необходимо учитывать силы трения, доказательства единственности решения или его существования нет.

2. Чаще всего, контактные задачи ставятся в виде вариационных неравенств и решаются методами, в которые заранее заложена неустранимая погрешность. Это такие методы как: метод штрафов, метод множителей Лагранжа и обобщённый (модифицированный) метод Лагранжа. На данный момент не существует единого подхода к решению задач контакта с трением деформируемых тел и используемые методы требуют тщательную настройку параметров контакта.

3. Задачи идеального контакта и контакта с известными предельными силами трения сформулированы в виде линейной задачи дополненности. Данные постановки позволяют использовать эффективные шаговые методы решения без дополнительной настройки параметров контакта. Постановок задач в виде линейной задачи дополненности в форме метода перемещений строительной механики для общего случая контакта с трением нет.

В целом, можно констатировать, что несмотря на большое количество работ в области расчёта конструктивно-нелинейных задач, степень разработанности методов решения контактных задач с трением недостаточна. Задача контакта деформируемых тел с трением представляет собой важную и сложную область исследований и требует развития как в теоретическом, так и практическом плане. Применение линейной задачи дополненности и методов её решения открывает новые возможности для более простого и эффективного моделирования контактного взаимодействия деформированных тел.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается плоская задача одностороннего контакта деформируемых линейно-упругих тел с учётом трения. В предлагаемой постановке полагается, что форма контактирующих поверхностей тел совпадает. В качестве закона трения выбран «закон Амонтона — Кулона» (трение Кулона). Он представляет собой линейную связь между поверхностной силой трения и силой нормальной реакции:

$$r_f = f \cdot \chi_n,$$

где: r_f — предельная сила трения скольжения;

f — коэффициент трения между контактирующими телами;

χ_n — сила нормальной реакции взаимодействующих тел.

В предлагаемой далее постановке расчёта контактных задач с трением рассматривается контакт деформируемых тел «узел в узел». Эти узлы в дальнейшем будем называть контактной парой. За m обозначим число контактных пар. Предполагается, что в каждой контактной паре узлы соединены односторонними связями. Связь по нормали к зоне контакта включена, когда эти точки находятся в контакте, и выключена в противном случае. Полагаем, что односторонняя связь по нормали работает только на сжатие. Связь по касательной к зоне контакта включена, если усилия взаимодействия меньше предельных сил трения и выключена, если усилия взаимодействия равны предельным силам трения. То есть, при включенной связи проскальзывание точек контактной пары невозможно, а при выключенной — возможно.

Принято следующее правило знаков:

— для усилий и перемещений по нормали к поверхности контакта: сжимающее усилие взаимодействия точек i -ой контактной пары $\chi_{ni} > 0$; взаимное удаление точек контактной пары $z_{ni} > 0$ (рис 1, а).

– для усилий и перемещений по касательной к поверхности контакта: если точки контактной пары условно разнести по нормали к зоне контакта, то усилия взаимодействия $x_{ti} > 0$ создадут пару сил с моментом по ходу часовой стрелки; взаимное перемещение $z_{ti} > 0$, если совпадает по направлению с $x_{ti} > 0$ (рис. 1, б, в).

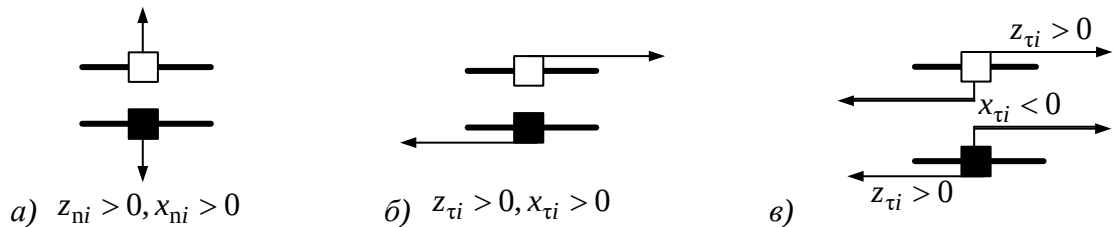


Рисунок 1 – Правило знаков для усилий взаимодействия x и взаимных перемещений z

В [126] случаи идеального контакта и контакта с известными предельными силами трения сведены к линейным задачам дополненности и разработан метод перемещений (МП) их решения.

Для реализации метода перемещений необходимо сформировать контактную матрицу жёсткости (КМЖ) $\mathbf{R}$ и контактный грузовой вектор (КГВ) $\mathbf{R}_F$ в основной системе указанного метода. Основная система метода перемещений получается из заданной превращением всех односторонних связей (по нормали к зоне контакта в каждой контактной паре) в двусторонние связи (рис. 2, узлы разнесены для наглядности).

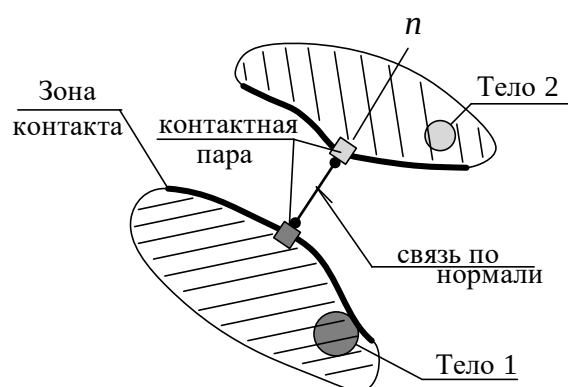


Рисунок 2 – Связи в основной системе метода перемещений

Компонент R_{Fi} КГВ представляет собой усилие во введённой связи i от внешнего воздействия (рис. 3).

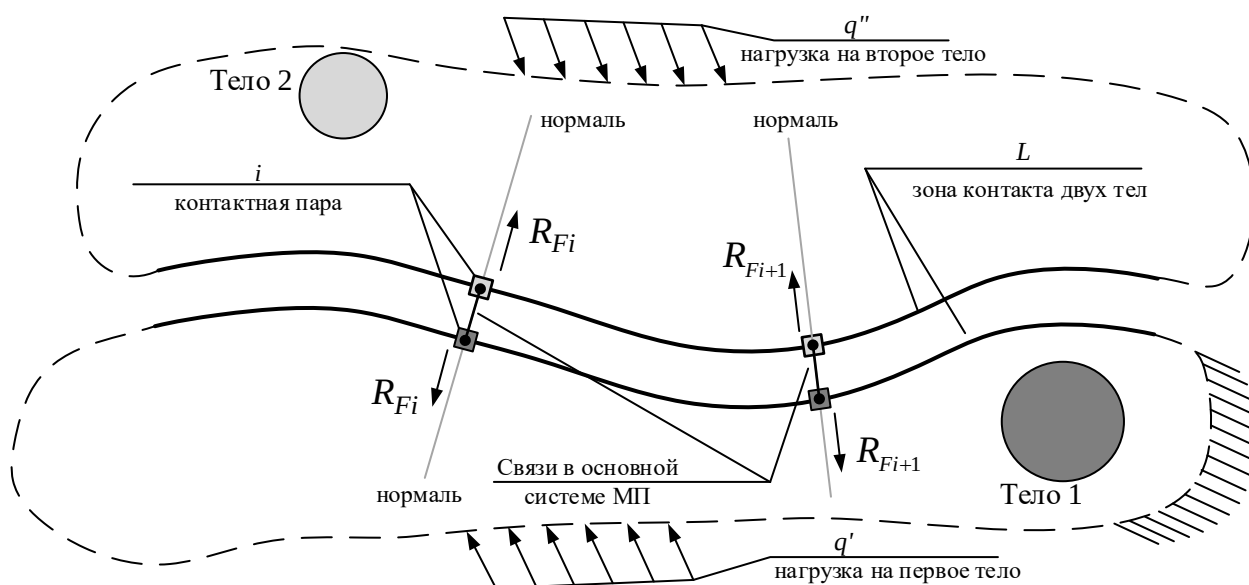


Рисунок 3 – Формирование контактного грузового вектора

Компонентой $R_{i,j}$ КМЖ является усилие во введённой связи i основной системы метода перемещений от единичной дислокации $\delta=1$ по направлению введённой связи j (рис. 4).

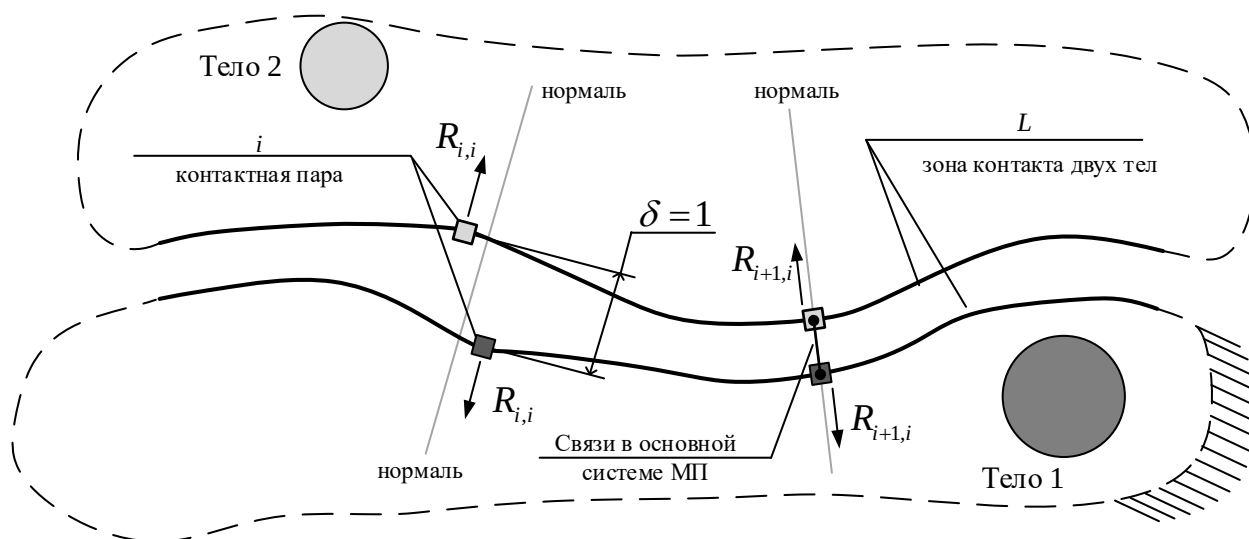


Рисунок 4 - Формирование j столбца контактной матрицы жёсткости

Для формирования КМЖ удобно использовать нуль-элементы [33], позволяющие свести кинематическое воздействие к силовому и обеспечить единичную дислокацию контактной пары в любом направлении даже для совпадающих узлов (см. п.3.2 «Нуль-элемент для формирования КМЖ и КГВ»).

Определение усилий взаимодействия контактных пар упрощается и сводится к нахождению усилий в нуль-элементе, соединяющих контактные пары.

Для последовательного изложения и демонстрации ключевых аспектов формулировки контактных задач в виде ЛЗД, начнём рассмотрение с более простых, частных случаев, таких как идеальный контакт и контакт с известными предельными силами трения. Это позволит выявить основные зависимости между взаимными перемещениями и усилиями взаимодействия точек контактирующих тел, используемые в ЛЗД и подвести к постановке задачи общего контакта с трением, когда прижимающие силы и зоны контакта/скольжения заранее неизвестны.

2.1. Постановка задачи идеального контакта в виде линейной задачи дополненности

Под идеальным контактом подразумевается односторонний контакт деформируемых тел без учёта трения. В этой задаче требуется определить зону контакта и зону отрыва. Для формирования основной системы в смысле метода перемещений следует ввести двусторонние связи по нормали к зоне контакта в каждой контактной паре. Следовательно, для описания НДС контактной пары i заданной системы достаточно двух неотрицательных переменных x_{ni} , z_{ni} . В работе [152] получена вариационная постановка задачи идеального контакта в виде условной минимизации выпуклого квадратичного функционала. В работе [124] показано, что условия Куна-Таккера этой задачи приводят к ЛЗД следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{Fn}; \\ \mathbf{z}_n &\geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0; \quad \mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где: $\mathbf{R}_{nn}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей в контактных парах *по нормали* к зоне контакта от единичных дислокации узлов контактных пар *по нормали* к зоне контакта L (рис. 5);

x_n, z_n – векторы $[m \times 1]$ усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактных пар по нормали к зоне контакта;

R_{Fn} – КГВ $[m \times 1]$ для связей по нормали к зоне контакта.

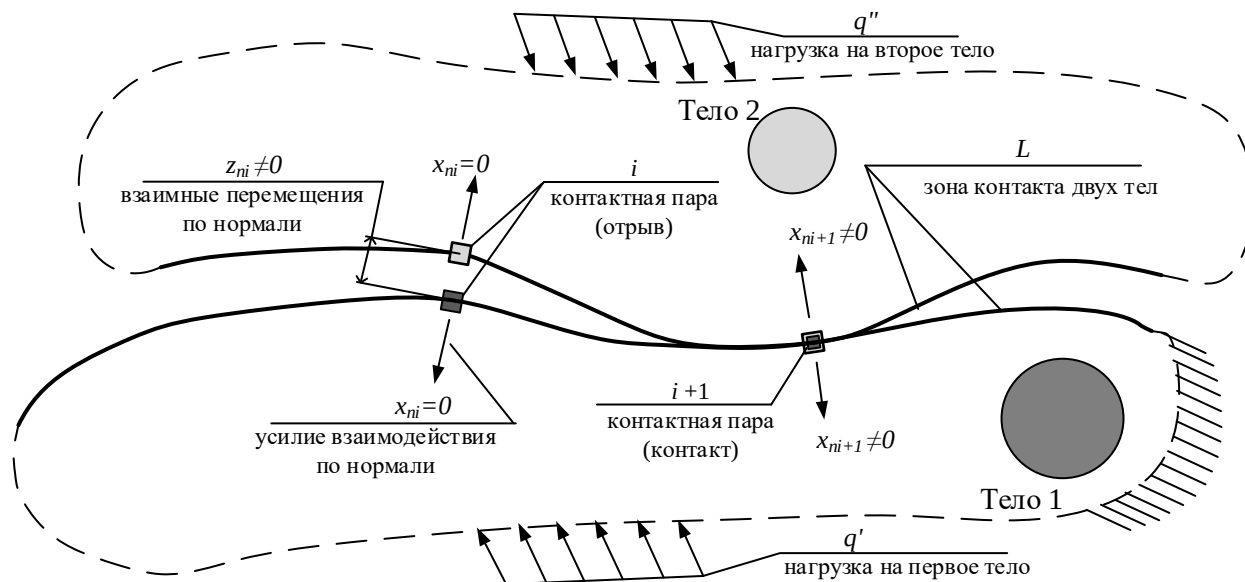


Рисунок 5 - Контакт деформируемых тел после деформации. Отрыв i контактной пары и касание $i+1$ контактной пары.

В основной системе метода перемещений, с учетом внешнего воздействия, векторы x_n, z_n связаны соотношением:

$$x_n = R_{nn} \cdot z_n + R_{Fn}$$

2.2. Постановка задачи контакта с трением при известных предельных силах трения в виде линейной задачи дополненности

Рассматривается односторонний контакт с трением, когда известна зона контакта и в ней известны прижимающие и не меняющиеся в процессе деформации силы взаимодействия деформируемых тел по нормали к поверхности контакта. Соответственно, предельные силы трения известны (трение реализуется по закону Кулона) и не меняются в процессе деформации. Необходимо в зоне контакта определить положение зоны сцепления и зоны скольжения. Под сцеплением

подразумевается взаимное нулевое смещение точек контактной пары по касательной к зоне контакта, под скольжением или проскальзываем ненулевое смещение. В работах [80–82] рассмотрены случаи, для которых реализуется контакт с известными предельными силами трения. Расчёт таких систем сведён к задаче безусловной оптимизации недифференцируемого функционала. В работах [125,153] подобные задачи, в свою очередь, сведены к условной оптимизации дифференцируемого функционала, условия Куна-Таккера которой приводят к ЛЗД вида:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tau\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{F\tau} \\ -\mathbf{R}_{F\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_f \end{bmatrix}; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &\geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \\ \mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ &= 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

где: $\mathbf{R}_{\tau\tau}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей, введённых в контактных парах *по касательной* к зоне контакта от единичных дислокации контактных пар *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{F\tau}$ – КГВ для связей *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{x}_\tau = (\mathbf{x}_\tau^+ - \mathbf{x}_\tau^-)/2$ – вектор $[m \times 1]$ усилий взаимодействия контактных пар *по касательной* к зоне контакта (рис. 6);

$\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$ – вектор $[m \times 1]$ взаимных перемещений контактных пар *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{r}_f = f \cdot \mathbf{X}_n$ – вектор предельных сил трения;

f – коэффициент трения между контактными парами,

$\mathbf{X}_n$ – вектор прижимающих усилий (усилий взаимодействия).

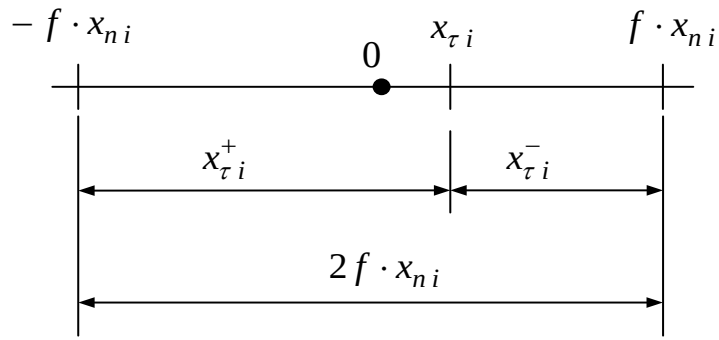


Рисунок 6 – Связь переменных x_{τ} , x_{τ}^+ , x_{τ}^- в i контактной паре

Отметим, что для описания НДС контактной пары i заданной системы необходимо четыре неотрицательные переменные $x_{\tau i}^+$, $x_{\tau i}^-$, $z_{\tau i}^+$, $z_{\tau i}^-$, поскольку перемещения $z_{\tau i}$ и усилия $x_{\tau i}$ не имеют ограничений на знак. На рис. 7, а показана зависимость усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактной пары i в заданной системе.

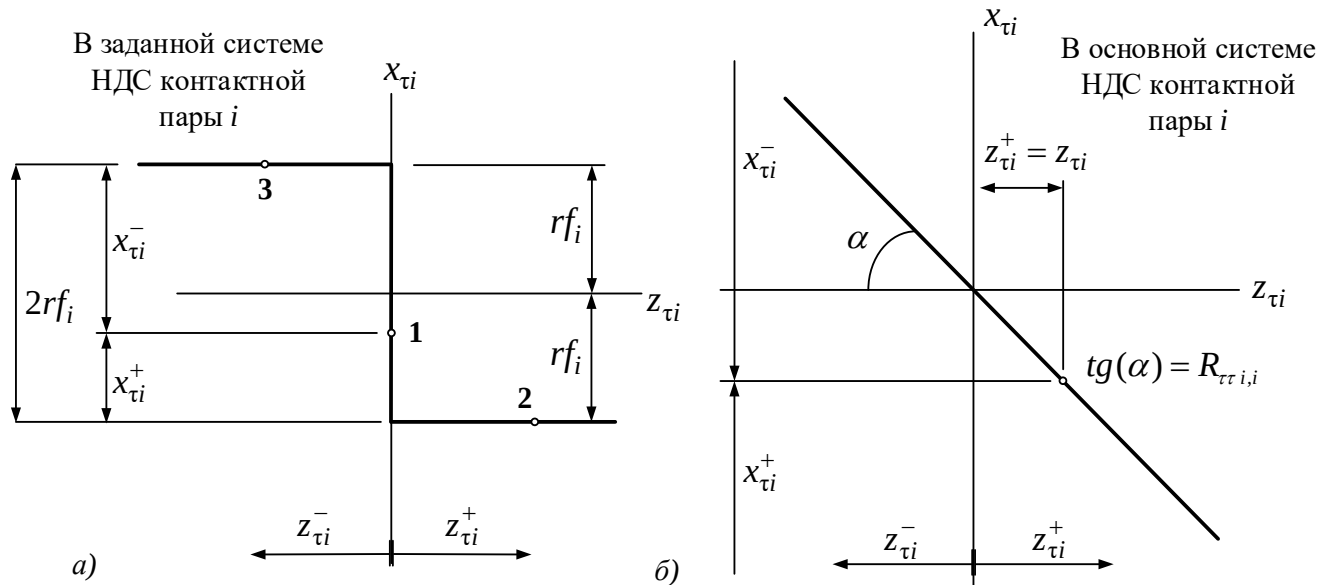


Рисунок 7 – Зависимость усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактной пары i : а) в заданной системе. б) в основной системе

Переменную $x_{\tau i}^+$ следует понимать как «резерв сцепления» контактной пары i при тенденции (попытке) смещения из недеформированного состояния по направлению $z_{\tau i} > 0$ (см. правило знаков на рис. 1). Этот случай изображён на рис. 7, а точкой 1. Переменная $x_{\tau i}^-$ – «резерв сцепления» контактной пары i при

попытке смещения из недеформированного состояния по направлению $z_{\tau i} < 0$. Переменными $z_{\tau i}^+$ и $z_{\tau i}^-$, в свою очередь, являются взаимными перемещениями точек контактной пары i в положительном и отрицательном направлениях соответственно (см. правило знаков на рис. 1). Т. е. при положительном взаимном перемещении $z_{\tau i} > 0$ имеем $z_{\tau i}^+ > 0$, $z_{\tau i}^- = 0$ и $z_{\tau i} = z_{\tau i}^+$, а при отрицательном $z_{\tau i} < 0$ имеем $z_{\tau i}^- > 0$, $z_{\tau i}^+ = 0$ и $z_{\tau i} = -z_{\tau i}^-$.

Таким образом, при исчерпании резерва $x_{\tau i}^+ = 0$ сила трения в контактной паре равна предельной $x_{\tau i} = r_{fi}$ и проскальзывание происходит в направлении $z_{\tau i} > 0$, т.е. переменная $z_{\tau i}^+ > 0$ (точка 2 на рис. 7, а). При исчерпании резерва $x_{\tau i}^-$ ситуация аналогична (точка 3 на рис. 7, а).

Систему уравнений (3) можно получить непосредственно. Обратимся для этого к основной системе метода перемещений (МП) для рассматриваемой задачи. Основная система МП получается превращением всех односторонних связей трения в двухсторонние. Таким образом, проскальзывание точек контактной пары в основной системе исключено.

Векторы $\mathbf{x}_\tau$, $\mathbf{z}_\tau$ в основной системе связаны соотношением:

$$\mathbf{x}_\tau = -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau.$$

Отрицательный знак в выражении объясняется принятым правилом знаков (рис. 1, в), положительные взаимные переменные перемещения $\mathbf{z}_\tau$ обеспечивают возникновение отрицательных сил взаимодействия $\mathbf{x}_\tau$. Аналогичными соотношениями будут связаны векторы $\mathbf{x}_\tau^+$, $\mathbf{x}_\tau^-$, $\mathbf{z}_\tau^+$, $\mathbf{z}_\tau^-$:

при увеличении $z_{\tau i}^+$ уменьшается $x_{\tau i}^+$ и увеличивается $x_{\tau i}^-$;

при увеличении $z_{\tau i}^-$: увеличивается $x_{\tau i}^+$ и уменьшается $x_{\tau i}^-$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\tau^+ &= -(-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+) + (-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-) = +\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-; \\ \mathbf{x}_\tau^- &= +(-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+) - (-\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-) = -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^-. \end{aligned}$$

Если учесть еще внешнее воздействие и предельные силы трения, то

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + \mathbf{r}_f, \end{aligned} \quad (4)$$

что совпадает с системой уравнений (3), при соблюдении условий неотрицательности и дополняющей нежёсткости:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \\ \mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ = 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0. \end{aligned}$$

2.3. Постановка задачи в виде линейной задачи дополнителности для общего случая контакта с трением

Рассматривается односторонний контакт с трением, когда прижимающие силы меняются в процессе деформирования. В этом случае заранее неизвестны зоны контакта и отрыва, а в зоне контакта также неизвестны зоны сцепления и проскальзывания [92].

В обоих рассмотренных выше случаях (идеальный контакт и контакт с известными предельными силами трения) ЛЗД можно формировать *непосредственно* с помощью основной системы метода перемещений. Предлагается далее использовать этот подход.

В общем случае контакта с трением постановка задачи в виде условного экстремума некоторого функционала не получена. Поэтому, предлагаем далее эвристическую постановку общего случая контакта с трением в виде ЛЗД, записанной для дискретизованной системы.

В этом случае для формирования основной системы МП вводятся двусторонние связи по нормали и по касательной к зоне контакта для каждой контактной пары (односторонние связи превращаются в двусторонние). На рис. 8 показаны связи в контактной паре в основной системе, узлы разнесены для наглядности. С точки зрения модели, если узлы сцеплены и находятся в контакте — они совпадают, т.е. точки контактной пары имеют одинаковые координаты.

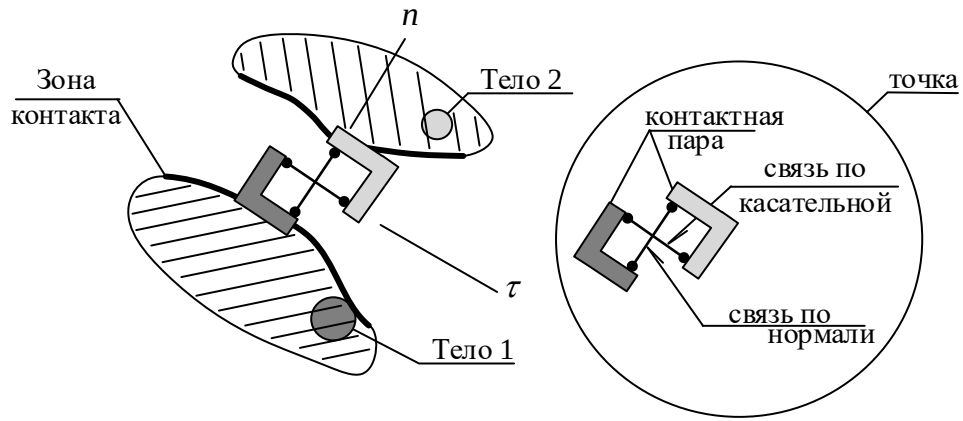


Рисунок 8 – Связи в основной системе метода перемещений

Для описания НДС контактной пары i заданной системы используем шесть неотрицательных переменных $x_{ni}, z_{ni}, x_{ti}^+, x_{ti}^-, z_{ti}^+, z_{ti}^-$. На рис. 9 показан общий случай контакта с трением через обозначенные переменные, учитывая, что: $z_\tau = z_\tau^+ - z_\tau^-$, $x_\tau = (x_\tau^+ - x_\tau^-)/2$.

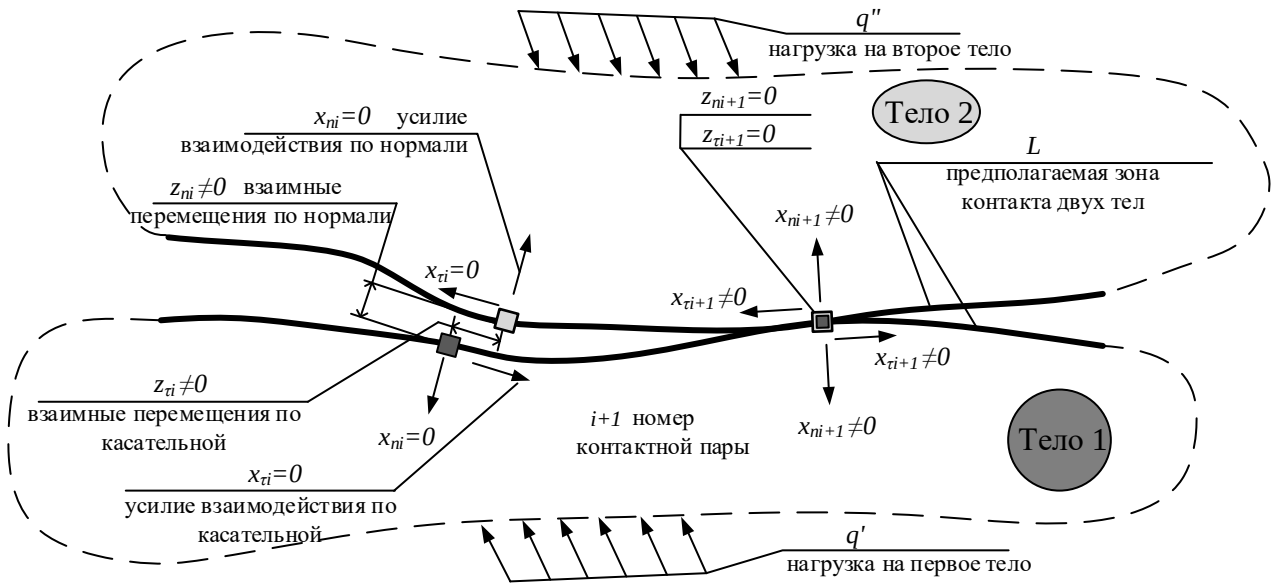


Рисунок 9 – Контакт деформируемых тел после деформации. Отрыв i контактной пары и касание $i+1$ контактной пары.

Ясно, что в такой основной системе усилия взаимодействия по нормали к зоне контакта X_n зависят не только от взаимных перемещений по нормали Z_n , но и от взаимных перемещений по касательной к зоне контакта Z_τ :

$$x_n = R_{nn} \cdot z_n + R_{n\tau} \cdot z_\tau + R_{Fn},$$

где $\mathbf{R}_{nt}$ – КМЖ $[m \times m]$ для связей *по нормали* от единичных дислокаций *по касательной* к зоне контакта;

$\mathbf{R}_{Fn}$ – КГВ для связей *по нормали* к зоне контакта (рис. 10).

Или, с учётом того, что $\mathbf{z}_\tau = \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{z}_\tau^-$:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{nt} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{nt} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}. \quad (5)$$

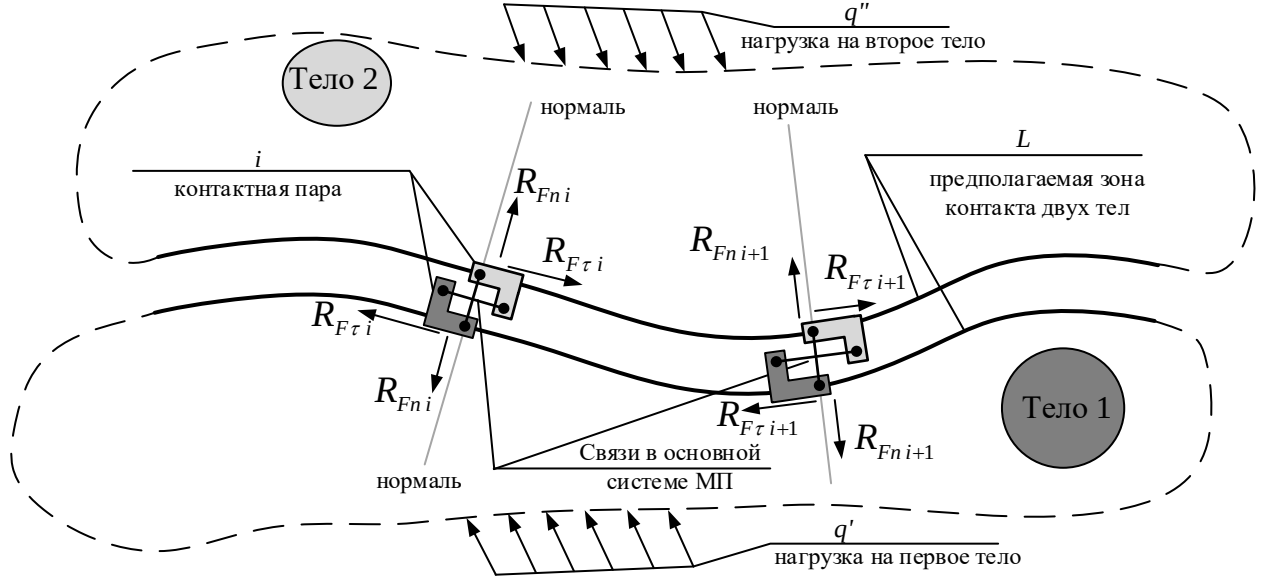


Рисунок 10 - Формирование КГВ в случае общего контакта с трением

Для выражения (4), учтем зависимость $\mathbf{x}_\tau^+$, $\mathbf{x}_\tau^-$, в том числе, от $\mathbf{z}_n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{tn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{tt} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{tt} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Ft} + \mathbf{r}_f, \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{tn} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{tt} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{tt} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{Ft} + \mathbf{r}_f, \end{aligned} \quad (6)$$

где: $\mathbf{R}_{tn}$ – контактная матрица жесткости $[m \times m]$ для связей *по касательной* от единичных дислокаций *по нормали* к зоне контакта (рис. 11), отметим, что $\mathbf{R}_{tn} = \mathbf{R}_{nt}^T$.

$\mathbf{r}_f$ – предельные силы трения, зависящие от прижимающих контактных сил взаимодействия (5):

$$\mathbf{r}_f = f \cdot \mathbf{x}_n = f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{nt} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{nt} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}). \quad (7)$$

В результате объединения (5) и (6) с учетом (7) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}; \\
\mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}); \\
\mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}).
\end{aligned} \quad (8)$$

Добавив к системе уравнений (8) условия неотрицательности и дополняющей нежёсткости из (2) и (3) приходим к ЛЗД для контакта с трением:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{n\tau} \\ \mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} \\ \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{Fn} \\ -\mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{Fn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_n &\geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0; \\
\mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n &= 0; \\
\mathbf{x}_\tau^+ &\geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \\
\mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ &= 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0.
\end{aligned} \quad (9)$$

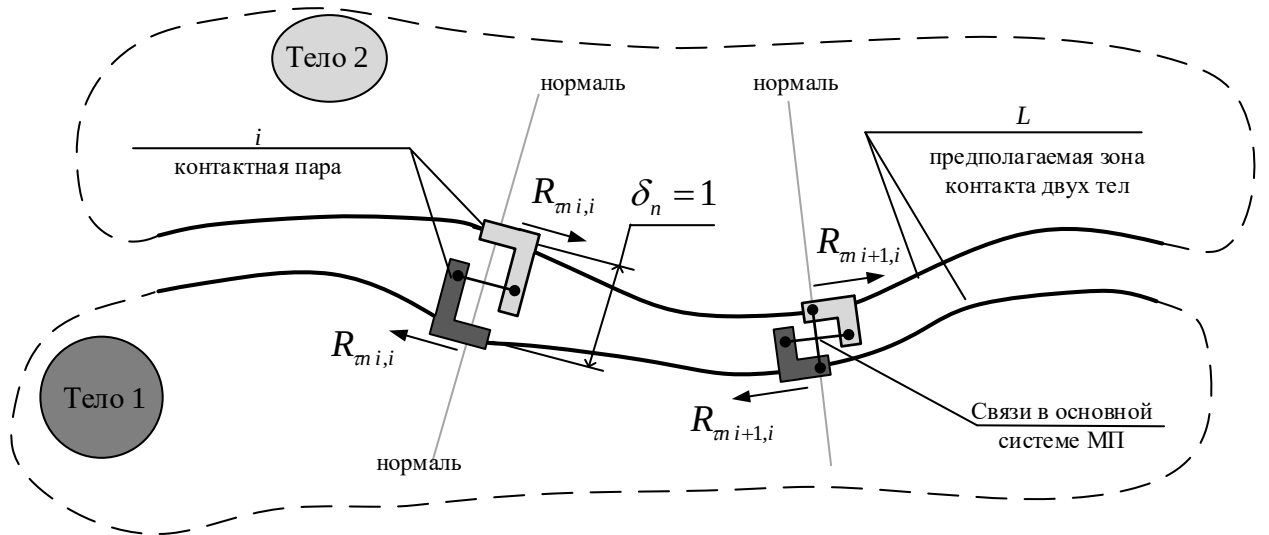


Рисунок 11 - Формирование столбца j КМЖ $\mathbf{R}_{\tau n}$

2.4. Постановка задачи в виде линейной задачи дополненности для общего случая контакта с трением с учётом зазоров

Рассматривается односторонний контакт с трением, когда узлы контактных пар до деформаций находятся на некотором расстоянии [99]. Зазор учитывается по нормали к зоне контакта. Если необходимо описать параметры НДС контактной пары i с учётом начального зазора η_i , то получается 4 случая (рис. 12):

- Контакт деформированных тел (рис. 12, а):

зазор закрыт $z_{ni} + \eta_i = 0$, $z_{ni} = -\eta_i$; силы взаимодействия $x_{ni} > 0$.

- Момент касания/отрыва деформированных тел (рис. 12, б):

Зазор закрыт $z_{ni} + \eta_i = 0$, $z_{ni} = -\eta_i$; силы взаимодействия $x_{ni} = 0$.

- Уменьшение начального зазора – сближение тел (рис. 12, в):

зазор открыт $z_{ni} + \eta_i > 0$, $z_{ni} > -\eta_i$, $z_{ni} < 0$, $x_{ni} = 0$.

- Увеличение начального зазора – удаление тел (рис. 12, г):

зазор открыт $z_{ni} + \eta_i > 0$, $z_{ni} > -\eta_i$, $z_{ni} > 0$, $x_{ni} = 0$.

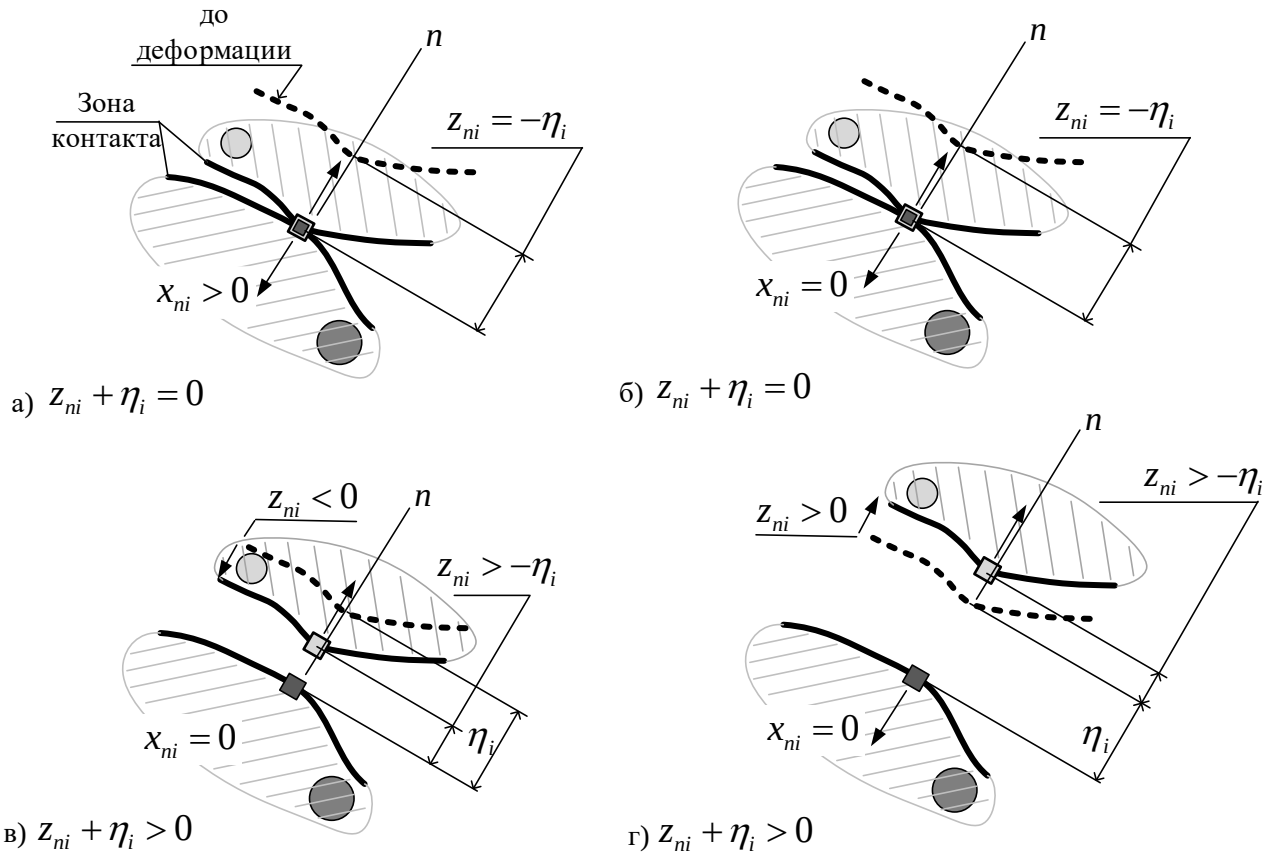


Рисунок 12 – Перемещения в i -й контактной паре с учётом начального зазора

В общем случае условие неотрицательности имеет вид $z_{ni} + \eta_i > 0$, условие дополняющей нежёсткости – $x_{ni} \cdot (z_{ni} + \eta_i) = 0$.

Обозначим

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_n + \boldsymbol{\eta}. \quad (10)$$

где η – вектор начальных зазоров в зоне контакта с компонентами η_i – зазорами контактной пары i до приложения нагрузки. Тогда выражения (8), с учетом (10), принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}); \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau n} \cdot \tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}). \end{aligned}$$

Подставляем $\tilde{\mathbf{z}}$ в приведённую выше систему уравнений и получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &= \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \eta + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{F\tau} + \\ &\quad + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}); \\ \mathbf{x}_\tau^- &= -\mathbf{R}_{\tau n} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{\tau n} \cdot \eta - \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ + \mathbf{R}_{\tau\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- - \mathbf{R}_{F\tau} + \\ &\quad + f \cdot (\mathbf{R}_{nn} \cdot \mathbf{z}_n - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^+ - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \mathbf{z}_\tau^- + \mathbf{R}_{Fn}). \end{aligned}$$

Перепишем эту систему уравнений в матричном виде. Добавим условия неотрицательности и дополняющей нежёсткости. В результате придём к постановке задачи с учётом начальных зазоров в виде ЛЗД:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_\tau^+ \\ \mathbf{x}_\tau^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{n\tau} \\ \mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \\ -\mathbf{R}_{\tau n} + f \cdot \mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{\tau\tau} + f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} & \mathbf{R}_{\tau\tau} - f \cdot \mathbf{R}_{n\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_\tau^+ \\ \mathbf{z}_\tau^- \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta \\ \mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta) - \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \eta \\ -\mathbf{R}_{F\tau} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \eta) + \mathbf{R}_{n\tau} \cdot \eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_n &\geq 0; \quad \mathbf{x}_n \geq 0; \\ \mathbf{z}_n^T \cdot \mathbf{x}_n &= 0; \\ \mathbf{x}_\tau^+ &\geq 0; \quad \mathbf{x}_\tau^- \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^+ \geq 0; \quad \mathbf{z}_\tau^- \geq 0; \\ \mathbf{z}_\tau^{+T} \cdot \mathbf{x}_\tau^+ &= 0; \quad \mathbf{z}_\tau^{-T} \cdot \mathbf{x}_\tau^- = 0, \end{aligned}$$

Таким образом, для учёта начальных зазоров в контактных парах в предполагаемой зоне контакта необходимо модифицировать только грузовой вектор для полученной постановки (9) ЛЗД.

Данная модификация постановки в виде ЛЗД контактной задачи позволяет рассматривать случай, когда начальный зазор в зоне контакта между телами присутствует до приложения нагрузки. Позволяет моделировать кинематическое воздействие, $\eta_i < 0$ – выпучивание, В случае выпучивания зазор может являться кинематической нагрузкой без наличия внешнего силового воздействия.

Упростим обозначение постановок задач в виде ЛЗД, принятых в главе 2 данной работы. В общем виде, независимо от постановки, ЛЗД в форме МП принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{R}_F \\ \mathbf{z} &\geq 0; \quad \mathbf{x} \geq 0; \\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Выводы по второй главе.

1. Предложена и сформулирована новая эвристическая постановка задачи одностороннего контакта деформируемых тел с трением на основе метода перемещений строительной механики в виде линейной задачи дополненности. Разработанный подход охватывает:

- общий случай контакта с трением, когда прижимающие силы и, соответственно, предельные силы трения зависят от деформации системы;
- случай с учётом начальных зазоров между контактирующими телами; который приводит к модификации лишь контактного грузового вектора в системе уравнений ЛЗД, не изменяя контактную матрицу жёсткости.

2. Показано, что для описания напряженно-деформированного состояния контактной пары в общем случае контакта с трением необходимо шесть неотрицательных переменных (усилия и перемещения по нормали x_n, z_n , два «резерва сцепления» x_t^+, x_t^- и два соответствующих им односторонних перемещения по касательной z_t^+, z_t^-).

3. Продемонстрировано, что все рассмотренные постановки приводят к единой форме записи линейной задачи дополненности (12). Таким образом, сохранение единой структуры задачи при разных постановках позволяет разрабатывать общие методы их решения.

ГЛАВА 3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Цель данной главы — разработать алгоритмы решения контактной задачи в новой постановке (11). Для обоснования необходимости разработки алгоритмов, в настоящей главе сначала будет рассмотрена стандартная реализация алгоритма Лемке. На примере модельных задач будет продемонстрирована его ограниченная применимость и показаны конкретные сценарии (такие как влияние ошибок округления), приводящие к некорректным результатам. Выявленные проблемы позволяют сформулировать требования к новым шаговым алгоритмам, разработка и демонстрация работы которых и является основным содержанием данной главы.

Существует множество методов решения ЛЗД (см. п.1.4). Для расчёта выбран шаговый метод Лемке. Алгоритм представляет собой физическую последовательную смену рабочих схем, что позволяет легко интерпретировать текущее состояние системы на любом шаге алгоритма. Поскольку рассматривается дискретизованная задача, в качестве инструмента решения выбран МКЭ. Для написания программы был выбран язык программирования Python.

Написана программа ContactLCP (Приложение В). Программа необходима для проверки работы алгоритмов, реализует автоматизированное формирование КЖМ, КГВ, начальную таблицу метода Лемке и новые разработанные алгоритмы решения контактной задачи в форме ЛЗД. Программа позволяет визуализировать каждый шаг работы алгоритма решения ЛЗД, показывая деформированную схему, усилия взаимодействия и взаимные перемещения в зоне контакта.

3.1. Метод Лемке

Метод представляет собой известный способ решения множества дискретных моделей систем, которые возможно свести к ЛЗД (1). ЛЗД расширяется путём введения параметра p :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{R}_F + p \cdot \mathbf{e}, \\
\mathbf{x} &\geq 0, \\
\mathbf{z} &\geq 0, \\
\mathbf{z}^T \cdot \mathbf{x} &= 0, \\
p &\geq 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где: $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ – векторы усилий взаимодействия и взаимных перемещений $[n \times 1]$;

$\mathbf{R}$ – заданная квадратная матрица $[n \times n]$;

$\mathbf{R}_F$ – заданный вектор $[n \times 1]$;

p – параметр расширения задачи;

$\mathbf{e}$ – вектор $[n \times 1]$, заполненный единицами.

Для решения ЛЗД методом Лемке необходимо сформировать начальную таблицу вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{R} & -\mathbf{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_F \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где: $\mathbf{E}$ – единичная матрица;

$\mathbf{R}, \mathbf{R}_F$ – КМЖ и КГВ, зависят от выбранной постановки задачи.

Таким образом, для получения начальной таблицы метода Лемке необходимо:

1. Определиться с постановкой задачи (2), (3), или (11).
2. Сформировать КМЖ.
3. Сформировать КГВ.
4. Сформировать начальную таблицу.

Начальная таблица метода Лемке (для идеального контакта) имеет вид:

Шаг 0	0	1	2	3	4	5	6		
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	R_c	min ratio
0	1	0	0	-1	1.5	-0.5	-1	-0.25	
1	0	1	0	1.5	-2.25	0.75	-1	0.875	
2	0	0	1	-0.5	0.75	-0.25	-1	0.375	

Столбец с индексами базисных переменных
 Столбец отношения элементов грузового вектора и ведущего столбца
 Ведущая строка (выделена серым)
 Ведущий столбец (выделен серым)

Физический смысл решения алгоритма Лемке описывается следующим образом.

Все контактные пары прижимаются силой («пригрузом»/«обжатием») p в выбранном направлении контакта (направление, в котором определялась жёсткость коэффициентов КМЖ $\mathbf{R}$). На шаге ноль параметр p определяется из условия наступления момента отрыва $x_i = 0, z_i = 0$ для одной из контактных пар, при прочих контактных парах, находящихся в контакте. Обжатие во всех контактных парах одинаково.

Шаговый процесс представляет собой определение минимального уменьшения значения «пригруза» p , необходимого для смены рабочих схем. Другими словами, шаговый процесс представляет собой последовательную смену рабочих схем (включение/ выключение односторонних связей) при уменьшении «пригруза» p . На каждом шаге определяются значения компонент векторов усилий взаимодействия и взаимных перемещений $\mathbf{x}, \mathbf{z}$.

Остановка шагового процесса происходит, когда:

- 1) искусственно введённый параметр «пригруза» p уменьшается до нуля. Это считается *нормальным* решением;
- 2) на определённом шаге становится невозможным уменьшить значение параметра p . Это означает, что дальнейшее уменьшение p превратит систему в механизм. Такое решение называется *лучевым*.

Стандартный алгоритм решения (блок-схема на рис. 13).

1. Проверка на *тривиальное решение*.

Проверяется, являются ли все элементы КГВ $\mathbf{R}_F$ положительными. Если это так, то все контактные пары находятся в контакте, тогда $\mathbf{x} = \mathbf{R}_F$. Основная система МП является решением задачи, шаговый процесс не иницируется.

2. Формирование *базиса* переменных $\mathbf{x}, \mathbf{z}$, нахождение ведущей строки *row* и ведущего столбца *col*.

В выбранном методе на шаге ноль базисными переменными являются усилия взаимодействия x_i в контактных парах, т.е. все односторонние связи находятся в контакте. На нулевом шаге определяется значение параметра «пригруза» p , которое обеспечит контакт во всех связях и момент отрыва ($x_i = 0, z_i = 0$) в одной из них. Для этого в качестве *ведущего столбца* выбирается столбец p .

Ведущая строка (указывает на индекс базисной переменной, которая на текущем шаге покинет базис) определяется по правилу минимального отношения *min_ratio*. Минимальное отношение – это отношение значений компонент грузового вектора к значениям компонент *ведущего столбца*. Строка с наименьшим неотрицательным *минимальным отношением* будет *ведущей строкой*.

На всех последующих шагах *ведущий столбец* и *базисные переменные* определяются по правилу дополняющей нежёсткости $x_i \cdot z_i = 0$:

1. Если из базиса выходит x_i – то в базис попадает z_i ; ведущим столбцом, становится столбец, соответствующий z_i . Этот случай описывает момент отрыва контактной пары по направлению i .

2. Если из базиса выходит z_i – то в базис попадает x_i ; ведущим столбцом, становится столбец, соответствующий x_i . Этот случай описывает момент касания контактной пары по направлению i .

3. Проверка на *лучевое решение*.

Проверяются условие: если все элементы *ведущего столбца* не положительные – то решение является лучевым.

4. Проверка на наличие параметра p в базисе.

Если параметр p вышел из базиса – это интерпретируется как нормальное решение.

5. Шаг однократного замещения Жордана-Гаусса.

Для проведения шага производится деление элементов *ведущей строки* на ведущий элемент:

$$\tilde{A} = \frac{A_{row,j}}{leading_el} (j = \overline{0, columns(A)}),$$

где: A – таблица метода Лемке на текущем шаге;

$\tilde{A}$ – таблица метода Лемке на следующем шаге;

$leading_el = A_{row,col}$ – ведущий элемент;

$j = \overline{0, columns(A)}$ – цикл по всем столбцам таблицы метода Лемке.

Затем проводится пересчёт остальных элементов таблицы:

$$\tilde{A} = A_{i,j} - A_{i,col} \cdot \frac{A_{row,j}}{leading_el} (i = \overline{0, rows(A)}; i \neq row; j = \overline{0, columns(A)})$$

6. Перейти к следующему шагу, реализуемому с пункта 2.

Шаговый процесс продолжается до тех пор, пока p не выйдет из базиса или определение ведущей строки станет невозможным – лучевое решение. На рис. 13 показана блок-схема алгоритма.

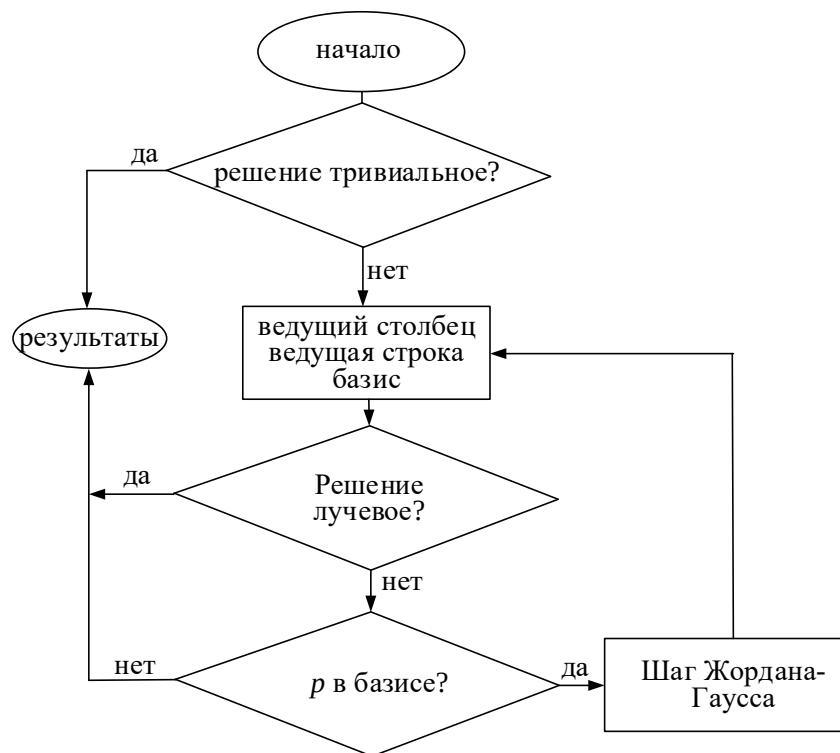


Рисунок 13 – Блок-схема алгоритма Лемке.

Для демонстрации базовых шагов алгоритма Лемке на упрощенной задаче перед его применением к новой постановке задачи предлагается рассмотреть простой пример решения задачи идеального контакта.

Пример 3.1. Для демонстрации работы алгоритма рассматривается балка (рис. 14) на односторонних опорах без трения (идеальный контакт). Номера возле опор на заданной схеме означают нумерацию односторонних связей (контактных пар, понимаемых как односторонняя опора и соответствующее ей опорное сечение балки). В каждом из последующих примеров, применяется разный масштаб для взаимных перемещений и усилий взаимодействия для отображения переменных в одних осях.

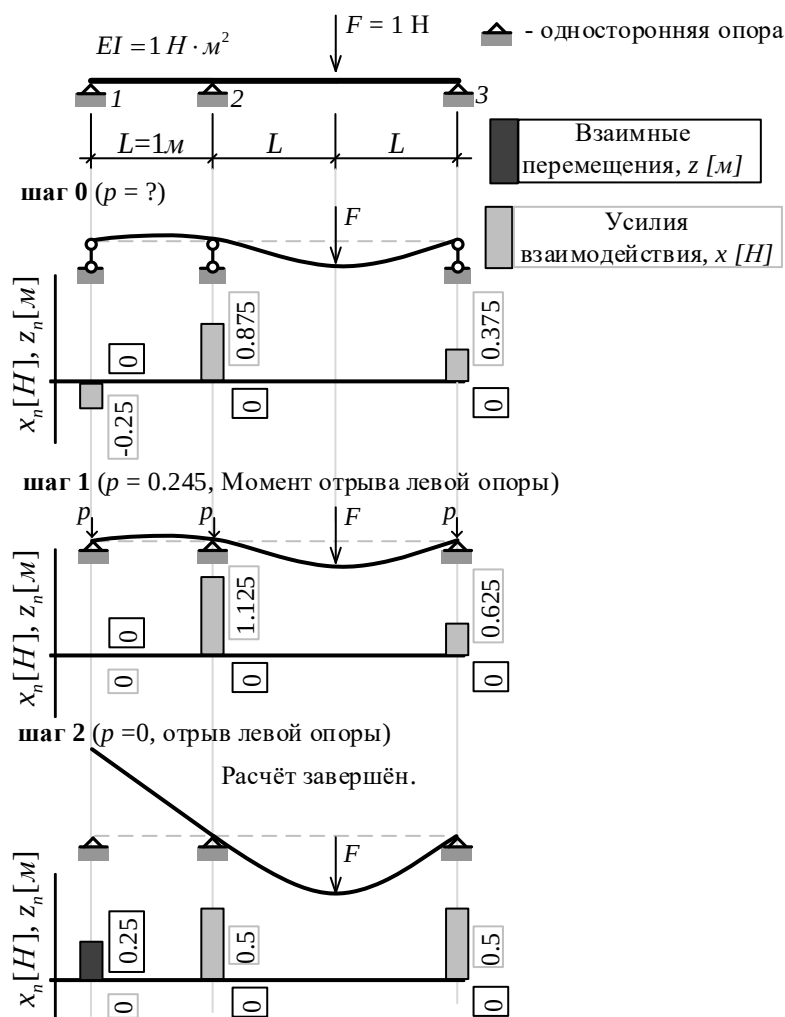


Рисунок 14 – Визуализация шагового процесса метода Лемке.

Таблицы метода Лемке для каждого из шагов алгоритма показаны ниже. Здесь серым цветом выделены *ведущий столбец* и *ведущая строка*. Грузовой вектор начальной таблицы, получаемый из КГВ $\mathbf{R}_F$ обозначим в таблице $\mathbf{R}_c$ (с – constant, т.к. нагрузка в представленном случае постоянна; позже рассматриваются задачи с наличием переменной нагрузки $\mathbf{R}_v$, v – variable). В названии столбцов таблицы числа в индексах означают номера выбранных направлений одностороннего взаимодействия.

Начальная таблица (шаг 0):

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	R_c	min ratio
0	1	0	0	-1	1.5	-0.5	-1	-0.25	
1	0	1	0	1.5	-2.25	0.75	-1	0.875	
2	0	0	1	-0.5	0.75	-0.25	-1	0.375	

В названии столбцов таблицы цифры в индексах означают номера выбранных направлений одностороннего взаимодействия. В данной задаче решение не тривиально, т. к. в столбце $\mathbf{R}_c$ присутствует отрицательная компонента. В базисе

находятся индексы $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, соответственно, базисные переменные $\begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ x_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.875 \\ 0.375 \end{bmatrix}$. В

качестве ведущего столбца выбирается столбец с параметром p . Ведущая строка в начале алгоритма выбирается исходя из строки, в которой располагается минимальный отрицательный элемент КГВ (столбец $\mathbf{R}_c$). После проведения шага однократного замещения Жордана-Гаусса таблица принимает вид (шаг 1):

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	$\mathbf{R}_c$	min ratio
6	-1	0	0	1	-1.5	0.5	1	0.25	0.25
1	-1	1	0	2.5	-3.75	1.25	0	1.125	0.45
2	-1	0	1	0.5	-0.75	0.25	0	0.625	1.25

Из базиса выходит параметр x_{n1} (момент отрыва по первому направлению/первой контактной пары) и базисным становится параметр p ,

соответственно $\begin{bmatrix} p \\ x_{n2} \\ x_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.125 \\ 0.625 \end{bmatrix}$. По принципу дополняющей нежёсткости ведущим

столбцом становится столбец z_{n1} . Определяется необходимая минимальная величина «пригруза» $p = 0.25H$ для наступления момента отрыва по первому направлению. Производится деление компонентов столбца $\mathbf{R}_c$ на компоненты ведущего столбца z_{n1} для расчёта минимального отношения min_ratio . В качестве ведущей строки (в ходе работы алгоритма) выбирается первая строка по минимальному положительному значению столбца min_ratio . После шага Жордана-Гаусса таблица имеет вид (шаг 2):

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	$\mathbf{R}_c$	min ratio
3	-1	0	0	1	-1.5	0.5	1	0.25	0.25
1	1.5	1	0	0	0	0	-2.5	0.5	
2	-0.5	0	1	0	0	0	-0.5	0.5	

Здесь параметр расширения задачи p выходит из базиса и z_{n1} становится базисной переменной. Это означает, что искусственный «пригруз» полностью снят. В

результате базисными переменными оказались
$$\begin{bmatrix} z_{n1} \\ x_{n2} \\ x_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \quad \text{Зная усилия}$$

взаимодействия и взаимные перемещения в зоне контакта можно легко получить положение и размеры зоны контакта и отрыва.

Стандартный алгоритм Лемке способен решать задачи, когда из базиса необходимо вывести одновременно несколько переменных, и в таблице в ходе вычислений не появляются ошибки округления. Однако, в численных расчётах их появление практически гарантировано из-за использования типов переменных с плавающей точкой. Это приводит к появлению отрицательных усилий взаимодействия и взаимных перемещений, что невозможно по постановке задачи. Эти случаи характерны для контактных задач с трением, когда метод Лемке не способен получить решение. Примеры подробно рассмотрены в п. 3.3.1 и п. 3.3.2.

3.2. Нуль-элемент для формирования контактной матрицы жёсткости и контактного грузового вектора

Для формирования КМЖ и КГВ в основной системе метода перемещений требуется обеспечить единичную дислокацию узлов контактной пары. Предлагается использовать для этих целей нуль-элемент [33,154].

Возможно использование следующего приёма для обеспечения единичной дислокации.

- 1) Связь между точками одной контактной пары разрывается.
- 2) По направлению разорванной связи прикладывается единичное силовое воздействие.
- 3) Определяется взаимное перемещение точек контактной пары по указанному направлению, и находится усилия взаимодействия во всех контактных парах.

4) Подсчитывается значение силового воздействия, обеспечивающего единичное взаимное перемещение, и соответствующие усилия в остальных контактных парах.

5) Описанная выше процедура повторяется для всех контактных пар.

Таким образом, необходимо было бы каждый раз модифицировать расчётную схему и, следовательно, заново формировать глобальную матрицу жёсткости системы.

Использование нуль-элемента позволяет обеспечить последовательную дислокацию в контактных парах, единожды сформировав глобальную матрицу жесткости ансамбля элементов и решив затем систему уравнений на количество загрузений, равное числу контактных пар, что повышает эффективность расчета.

Операция единичной дислокации узлов в заданном направлении необходима для формирования контактной матрицы жёсткости (КМЖ). Нуль-элемент позволяет эффективно обеспечить указанную дислокацию посредством силового нагружения.

Под задачу обеспечения единичной дислокации двух узлов в плоскости, доработан трёх узловый нуль-элемент с тремя степенями свободы и продольной жёсткостью стержней c и $-c$ в локальной системе координат (рис. 15, а). Указанный элемент в глобальной системе координат представлен на рис. 15, б.

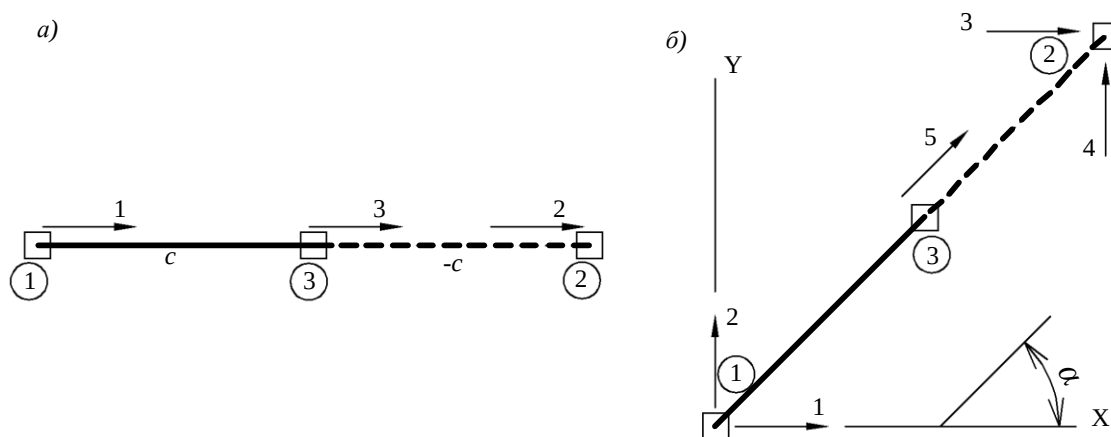


Рисунок 15 - Степени свободы нуль-элемента: а) ЛСК; б) ГСК

Матрица жёсткости нуль-элемента в локальной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} c & 0 & -c \\ 0 & -c & c \\ -c & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Допускается принимать любую положительную жёсткость c нуль-элемента. Во избежание вырожденности глобальной матрицы жёсткости, продольная жёсткость нуль-элемента принимается приблизительно равной жёсткости других элементов системы.

Матрица направляющих косинусов нуль-элемента:

$$\mathbf{\Lambda}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим перемещения узлов 1, 2, 3 нуль-элемента в ЛСК соответственно w_1, w_2, w_3 и нагрузим элемент сосредоточенными силами так, как показано на рис. 16. Уравнение равновесия для узла 3 примет вид:

$$-c \cdot w_1 + c \cdot w_2 = c.$$

Отсюда следует свойство нуль-элемента обеспечивать единичную дислокацию узлов 1 и 2:

$$w_2 - w_1 = 1,$$

при помощи силового воздействия. Незагруженный нуль-элемент моделирует жесткую связь в продольном направлении, поскольку в этом случае $w_1 = w_2$.

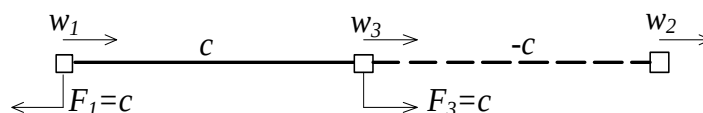


Рисунок 16 - Нуль-элемент в ЛСК, нагрузка и перемещения

В общем случае расположения элемента под углом α к глобальной оси координат для обеспечения единичной дислокации следует нагрузить нуль-

элемент по направлениям степеней свободы 1, 2, 5 усилиями $f_1 = c \cdot \cos \alpha$, $f_2 = c \cdot \sin \alpha$, $f_5 = c$. Это обеспечивает единичную дислокацию узлов 1 и 2 по направлению оси элемента (рис. 17). При этом η – известный зазор, может быть равен нулю.

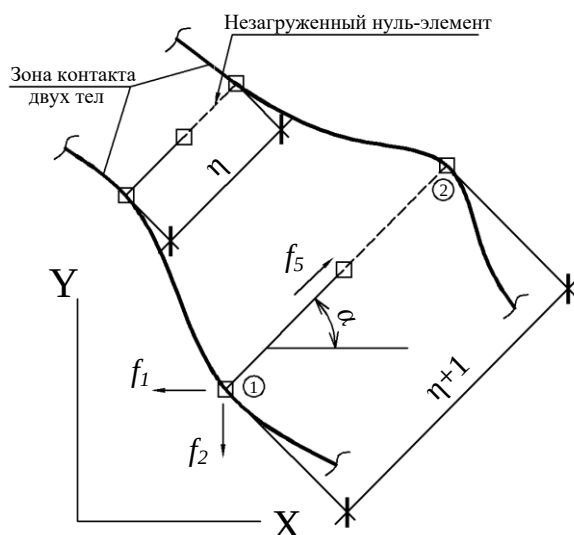


Рисунок 17 - Единичная дислокация узлов контактной пары

Таким образом, доработан нуль-элемент для обеспечения единичной дислокации узлов в произвольном направлении. Использование нуль-элементов позволяет обеспечить последовательную дислокацию в контактных парах, единожды сформировав глобальную матрицу жёсткости системы и решив затем систему уравнений на количество загрузок, равное числу контактных пар. Отрицательной стороной такого подхода является увеличение размерности задачи на количество односторонних связей, что, можно считать небольшой платой за повышение эффективности расчета в целом.

Пример 3.2. Рассмотрим модельную задачу, демонстрирующую обеспечение единичной дислокации узлов контактной пары. На рис. 18, а показана расчётная схема стержня с плавающей жёсткой заделкой, опёртой на балку-стенку. На рис. 18, б представлена упрощённая конечно-элементная (КЭ) схема, в которой узлы стержня и балки-стенки соединены нуль-элементами. Так как эти узлы совпадают, на КЭ-модели для наглядности: узлы разнесены. Положение нуль-элемента в системе определяется двумя узлами и заданным углом наклона.

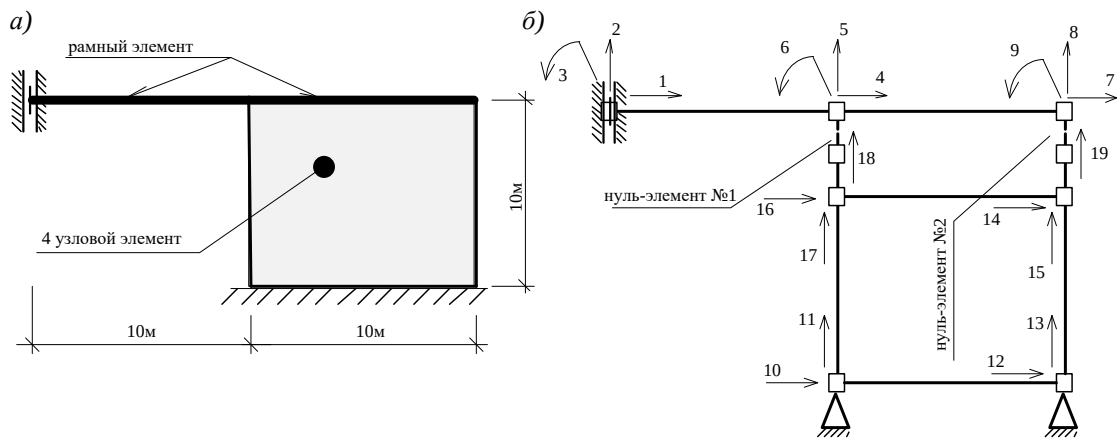


Рисунок 18 – Модельная задача: а) расчетная схема; б) КЭ-модель

Характеристики стержня: модуль упругости $E_r = 10^{11} \text{ Па}$, площадь поперечного сечения $A_r = 0.01 \text{ м}^2$, момент инерции $I_r = 10^{-4} \text{ м}^4$. Характеристики балки-стенки: модуль упругости $E = 10^4 \text{ Па}$, толщина $t = 1 \text{ м}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.2$. Продольная жёсткость нуль-элемента $c = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Рассмотрим случай, когда оба нуль-элемента вертикальны и обеспечим дислокацию с помощью первого нуль-элемента. Для этого загрузим систему по 17-й и 18-й степени свободы усилиями $-c$ и c соответственно. Полученная в результате расчета деформированная схема показана на рис. 19, а. Заметим, что второй нуль-элемент не загружен и, следовательно, работает как жёсткая связь по вертикали, не препятствуя перемещениям по горизонтали.

Далее повернём первый нуль-элемент и расположим его под углом $\alpha = 45^\circ$. Деформированная схема для этого случая с обеспечением единичной дислокации первым нуль-элементом показана на рис. 19, б.

На рис. 19, в показана деформированная схема при горизонтальном положении левого нуль-элемента. Следует отметить что: 1) стержень переместился вверх без изгибной деформации; 2) величина этого перемещения определяется деформацией балки-стенки; 3) продольные перемещения узлов стержня по направлению 4, 7 (рис. 18, б) $U_4 = U_7 = 2 \cdot 10^{-5} \ll 1$ и на схеме не показаны.

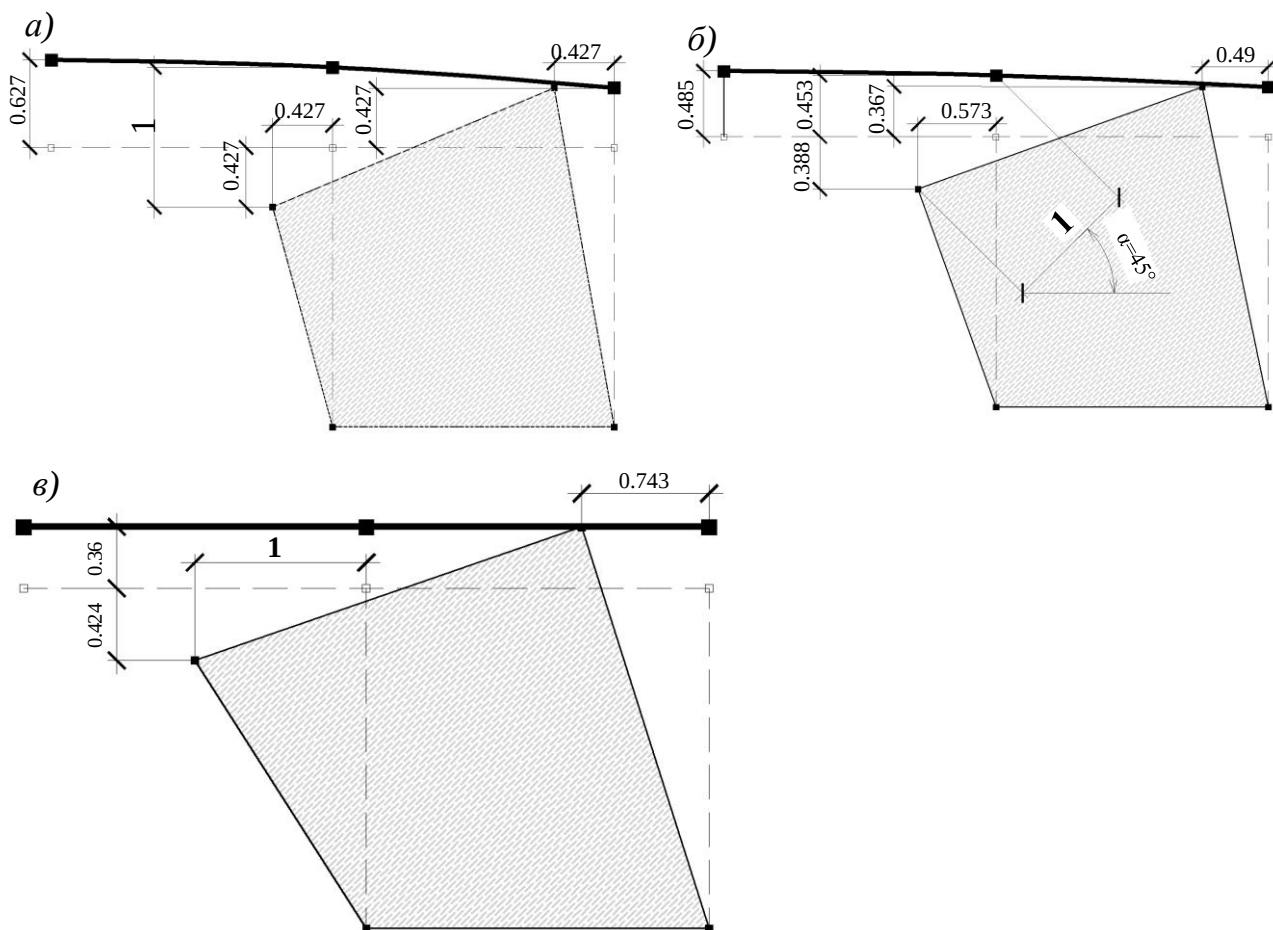


Рисунок 19 – Деформированная схема для системы с двумя нуль-элементами

Рассмотрим такую же схему, но с отсутствием второго нуль-элемента в качестве связи и варианты расположения первого нуль-элемента под углами $\alpha = 90^\circ, 45^\circ, 0^\circ$.

Для случая $\alpha = 90^\circ$ при обеспечении нуль-элементом единичной дислокации стержень переместится вверх как жёсткое целое на единицу (рис. 20, а).

Для случая $\alpha = 45^\circ$ стержень так же переместится вверх как жёсткое целое, но для обеспечения единичной дислокации узлов, соединённых нуль-элементом в нужном направлении, вертикальное перемещение стержня составит 1.414 м. (рис. 20, б).

Если расположить нуль-элемент горизонтально ($\alpha = 0^\circ$), то алгоритм выдаёт сообщение о вырожденности глобальной матрицы жёсткости. Это обусловлено тем, что схема становится механизмом – у стержня отсутствует ограничение перемещения по вертикали. Но в более сложных КЭ-моделях в подобных случаях

глобальная матрица жёсткости может оказаться плохо обусловленной, что требует тщательного анализа получаемых результатов.

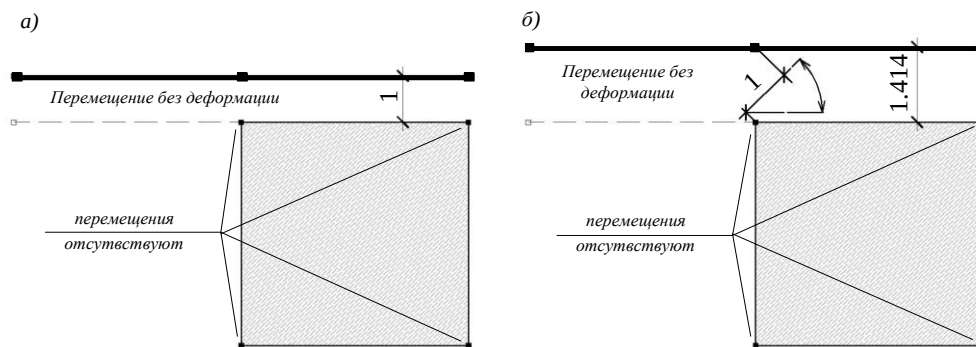


Рисунок 20 - Деформированная схема с нуль-элементом под разными углами. а) $\alpha = 90^\circ$
б) $\alpha = 45^\circ$

Незагруженный нуль-элемент позволяет моделировать жёсткую связь в произвольном направлении между двумя точками деформируемых тел, даже если координаты этих точек совпадают.

3.3. Реализация метода Лемке в общем случае контакта с трением.

В этой части работы показаны особенности формирования начальной таблицы и ход решения ряда контактных задач. Разобраны случаи тривиального, лучевого и нормального решений, показаны критерии их появления.

Начальная таблица.

Начальная таблица метода Лемке формируется на основе КМЖ и КГВ.

Для получения КМЖ и КГВ:

1. Все контактные пары соединяются нуль-элементами по нормали и по касательной к зоне контакта
2. Формируется глобальная матрица жёсткости системы с нуль-элементами.
3. Формируются глобальные грузовые векторы в количестве равном числу введённых односторонних связей n плюс один от внешнего воздействия.
4. Решается СЛАУ с $n+1$ правыми частями.
5. Определяются усилия в нуль-элементах для получения компонент КМЖ и КГВ.

Если первые n глобальных грузовых векторов сформированы от единичных дислокаций контактных пар узлов, то первые n решений СЛАУ (векторы глобальных узловых перемещений) используются для формирования КМЖ. Первый вектор глобальных узловых перемещений используется для получения усилий во введенных нуль-элементах, что является первым столбцом КМЖ. Усилия в нуль-элементе определяются по формуле:

$$N_{ne} = -\mathbf{k}^e[2] \cdot (\mathbf{\Lambda}^e \cdot \mathbf{u}^e),$$

где: $\mathbf{k}^e[2]$ – вторая строка матрицы жёсткости нуль-элемента (см. п. 3.2);

$\mathbf{\Lambda}^e$ – матрица направляющих косинусов нуль-элемента (см. п. 3.2);

$\mathbf{u}^e$ – вектор глобальных узловых перемещений на нуль-элементе.

Соблюдается следующее **правило нумерации** нуль-элементов в конечно-элементной модели: сначала нумеруются все нуль-элементы по нормали к зоне контакта, затем нумеруются в том же порядке нуль-элементы по касательной к зоне контакта. В результате получается КМЖ вида:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ \xrightarrow{m} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \end{array} \\ \hline \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{nt} & & \\ \hline \mathbf{R}_{tn} & \mathbf{R}_{tt} & & \\ \hline \end{array}$$

Как следует из постановки задачи (9), для формирования начальной таблицы нам необходимы все компоненты полученной матрицы.

Последний из $(n+1)$ полученных векторов глобальных узловых перемещений является решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на внешнее силовое воздействие. Из него формируется КГВ $\mathbf{Rf}$, состоящий из $\mathbf{Rf}_n$ и $\mathbf{Rf}_t$ (правая часть постановки контактной задачи с трением (9)).

Таблица метода Лемке на примере решения задачи с идеальными односторонними связями:

	0	1	2	3	4	5	6		
	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	R_c	min ratio
6	-1	0	0	1	-1.5	0.5	1	0.25	0.25
1	-1	1	0	2.5	-3.75	1.25	0	1.125	0.45
2	-1	0	1	0.5	-0.75	0.25	0	0.625	1.25

В данной таблице базисными являются переменные p, x_{n2}, x_{n3} с индексами 6, 1, 2 соответственно.

Далее рассматриваются особенности расчёта для новой постановки задачи алгоритмами с искусственно введённым обжатием и нарастающим параметром внешнего воздействия.

3.3.1. Алгоритм решения линейной задачи дополненности для общего случая контакта с искусственно введённым обжатием.

Блок схема представлена на рис. 13. Алгоритм Лемке не будет иметь отличий от алгоритма решения задачи идеального контакта (пример 3.1). Для решения задачи проведена модификация алгоритма Лемке [132]. Исключение представляет собой нестандартный для алгоритма выбор ведущей строки:

1. При выборе ведущей строки по *минимальному отношению*, если среди равных минимальных отношений можно выбрать строку, содержащую параметр расширения задачи p , то эта строка принимается ведущей.
2. Если на n шаге алгоритма параметр p крайне мал, выбирается строка, содержащая параметр p . Это делается для того, чтобы p вышел из базиса.

Чаще всего, *случай 1* соответствует одновременному выходу из базиса усилий взаимодействия по касательной для оторвавшихся контактных пар по нормали. С физической точки зрения происходит одновременный отрыв по касательной

некоторого количества контактных пар за один шаг. Стандартный алгоритм Лемке не выставляет приоритетов выбора ведущей строки (п 3.1), что ведёт к его некорректной работе.

В *случае 2* Под крайне малой величиной параметра «пригруза»/искусственного обжатия p понимается величина многократно меньше усилий взаимодействия контактирующих тел. Как правило, эта величина составляет менее $10^{-12} H$ при усилиях взаимодействия около $1 H$. Это обусловлено численной реализацией и использованием типов переменных с плавающей точкой float, double и т.п. в языках программирования, которые хранят информацию до 16 знаков после запятой. Проверка выбора ведущей строки необходима по причине появления ошибок округления в ходе проведения шага однократного замещения Жордана-Гаусса. В этом случае алгоритм Лемке выбирает минимальное значение и продолжает решение, что приводит к неверному решению. Подробно это продемонстрировано на примерах в этой главе.

Начальная таблица Метода Лемке при использовании данного алгоритма в соответствии с постановкой задачи (11) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{E} & -\mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{nr} & \mathbf{R}_{nr} \\ & -\mathbf{R}_{rn} - f \cdot \mathbf{R}_{nn} & -\mathbf{R}_{rr} - f \cdot \mathbf{R}_{nr} & \mathbf{R}_{rr} + f \cdot \mathbf{R}_{nr} \\ & \mathbf{R}_{rn} - f \cdot \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{rr} - f \cdot \mathbf{R}_{nr} & -\mathbf{R}_{rr} + f \cdot \mathbf{R}_{nr} \end{array} \right] \cdot \mathbf{e} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_r^+ \\ \mathbf{x}_r^- \\ \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_r^+ \\ \mathbf{z}_r^- \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{R}_{Fr} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{R}_{nr} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ -\mathbf{R}_{Fr} + f \cdot (\mathbf{R}_{Fn} - \mathbf{R}_{nn} \cdot \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{R}_{nr} \cdot \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Пример 3.3.1. Рассматривается односторонний контакт балки с опорами с учётом трения на действие разных нагрузок. Пример демонстрирует поведение алгоритма при получении тривиального, нормального и лучевого решений.

Конечно-элементная схема с нуль-элементами, степенями свободы и расчётные схемы показаны на рис. 21 (номера узлов на схеме показаны на сером фоне; начальные узлы нуль-элементов показаны тёмным цветом; промежуточные узлы нуль-элементов показаны без обводки). Форма некоторых узлов обусловлена необходимостью показать физическую сторону задачи, в самой модели узлы являются точками (например, пара узлов 5 и 1 имеют одинаковые/совпадающие координаты). Коэффициент трения f одинаков для всех контактных пар. Предельные силы трения можно получить по формуле $r_{fi} = x_{ni} \cdot f$ по закону Кулона.

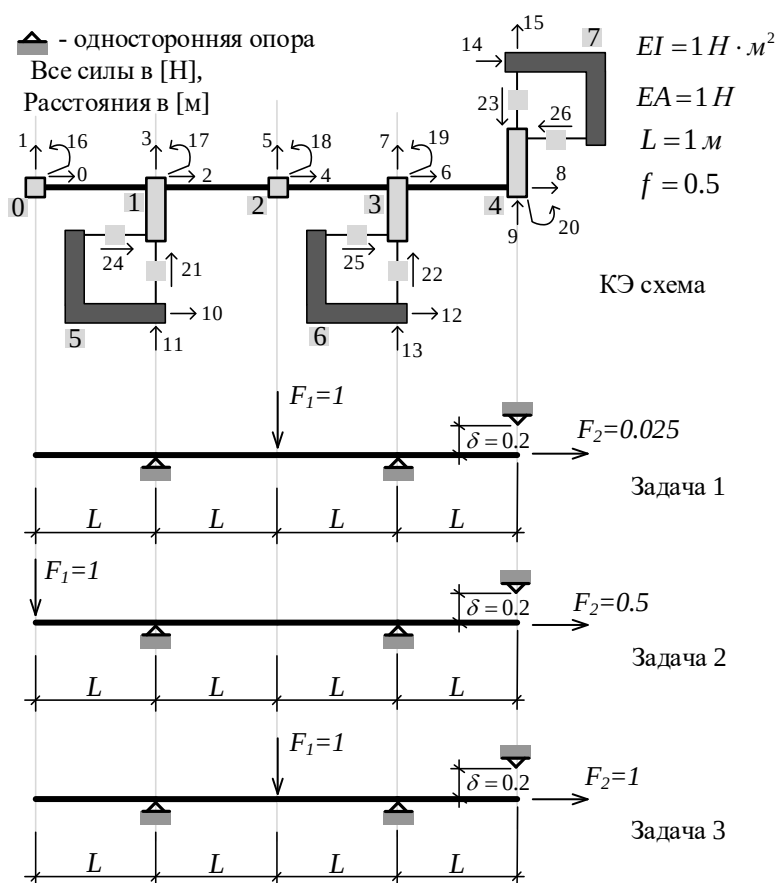
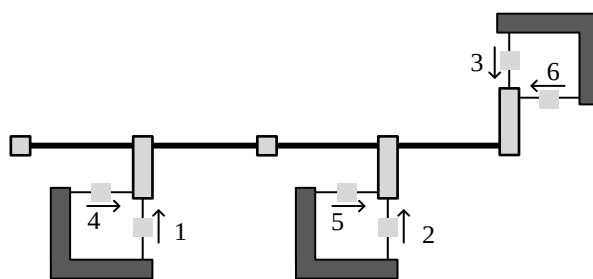


Рисунок 21 – КЭ схема и расчётные схемы балки на односторонних опорах с трением.

Нумерация нуль-элементов (контактных пар) для получения КМЖ и КГВ принятого вида производится по правилу, приведённому в п. 3.3. Нумерация показана ниже.



Все нуль-элементы по касательной располагаются с поворотом в 90 градусов по часовой стрелке к нуль-элементам по нормали в соответствии с правилом знаков на рис. 1.

Рассмотрим решение каждой из задач подробно.

Пример 3.3.1. Задача 1. Схема и результаты представлены на рис. 22.

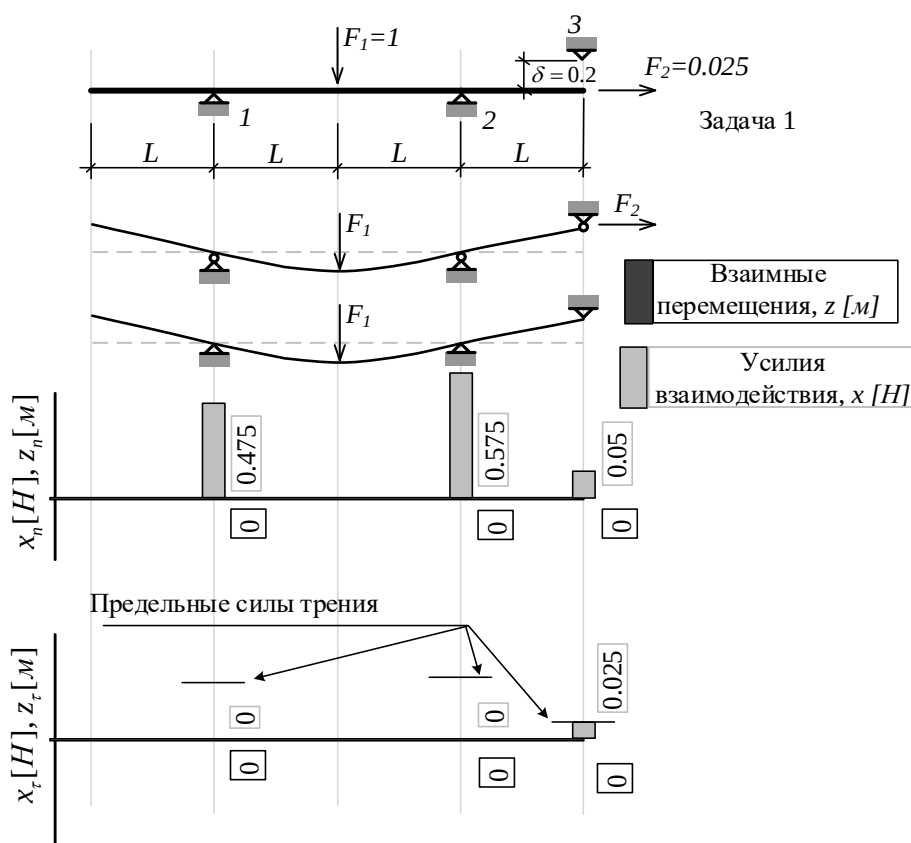


Рисунок 22 – Балка на односторонних опорах с трением.

Для задачи подобраны значения внешней силовой нагрузки F_1, F_2 , величина зазора Δ на третьей опоре и коэффициент трения f таким образом, чтобы на опоре 3 был момент отрыва по касательной ($x_{r3} = 0.025$, $x_{n3} \cdot f = 0.025$, $z_{r3} = 0$). Такой случай является наиболее сложным для контактного алгоритма. Усилия взаимодействия в

основной системе являются решением задачи, поэтому показаны результаты только для одного шага.

Начальная таблица метода Лемке имеет вид:

Шаг 0																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	p	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0.75	0.5	6.7E-34	-1E-32	3.1E-17	-6.7E-34	1E-32	-3.1E-17	-1	0.475	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.75	-2.25	-1.5	-5.3E-33	-1E-32	-9E-17	5.3E-33	1.5E-32	9.2E-17	-1	0.575	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.5	-1.5	-1	-5.3E-33	1.2E-16	6.1E-17	5.3E-33	-1.2E-16	-6.1E-17	-1	0.05	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.125	0.375	0.25	-1.5	0.5	1.5E-17	1.5	-0.5	-1.5E-17	-1	0.2375	
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.375	-1.125	-0.75	0.5	-1.5	-1	-0.5	1.5	1	-1	0.2875	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.25	-0.75	-0.5	-2.6E-33	-1	-1	2.6E-33	1	1	-1	0.05	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.125	0.375	0.25	1.5	-0.5	1.5E-17	-1.5	0.5	-1.5E-17	-1	0.2375	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.375	-1.125	-0.75	-0.5	1.5	1	0.5	-1.5	-1	-1	0.2875	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.25	-0.75	-0.5	-2.6E-33	1	1	2.6E-33	-1	-1	-1	-1.7E-16	

Как видно из начальной таблицы, если не учитывать ошибки округления и крайне малую отрицательную величину последнего элемента в КГВ $1.7 \cdot 10^{-16} H$, то такое решение можно считать тривиальным. Если следовать алгоритму Лемке, далее необходимо выбрать эту строку в качестве *ведущей строки* и начать шаговый процесс.

Шаг 1																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	p	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.5	1.5	1	3.3E-33	-1	-1	-3.3E-33	1	1	0	0.475	0.475
1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0.5	-1.5	-1	-2.6E-33	-1	-1	2.6E-33	1	1	0	0.575	0.575
2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0.25	-0.75	-0.5	-2.6E-33	-1	-1	2.6E-33	1	1	0	0.05	0.05
3	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	-0.375	1.125	0.75	-1.5	-0.5	-1	1.5	0.5	1	0	0.2375	0.2375
4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0.125	-0.375	-0.25	0.5	-2.5	-2	-0.5	2.5	2	0	0.2875	0.14375
5	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	5.6E-17	-2.22E-16	2.2E-16	-2.1E-48	-2	-2	2.1E-48	2	2	0	0.05	0.025
6	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-0.375	1.125	0.75	1.5	-1.5	-1	-1.5	1.5	1	0	0.2375	0.2375
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0.125	-0.375	-0.25	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	0.2875	
18	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.25	0.75	0.5	2.6E-33	-1	-1	-2.6E-33	1	1	1	1.7E-16	1.7E-16

На первом шаге алгоритма «пригруз» p , попавший в базис сразу же выходит из него и решение завершается. С физической точки зрения это означает: для обеспечения контакта во всех односторонних связях введён «пригруз» p равный $2 \cdot 10^{-16} H$. И на следующем шаге, когда «пригруз» был снят, образовался зазор по касательной на третьей контактной паре равный $1.7 \cdot 10^{-16} M$, что невозможно по постановке задачи, т.к. в базисе находится усилие взаимодействия по касательной для третьей опоры.

Шаг 2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Без учёта ошибок округления получается точное решение и алгоритм показывает свою устойчивость к подобного рода ошибкам. Ошибки округления в 16-м знаке после запятой возникают из-за того, что десятичные дроби не всегда могут быть точно представлены в двоичной системе. В Python числа типа float используют формат IEEE 754 (64 бита), что обеспечивает точность примерно 15-16 значащих десятичных цифр. Из-за этого на больших порядках могут появляться неточности, характерные для большинства языков программирования.

Таким образом, на простом примере продемонстрирована неспособность стандартного алгоритма Лемке корректно решать более общий класс контактных задач с трением. Это и порождает проблему, заключающуюся в необходимости модификации шагового процесса алгоритма для устранения указанных недостатков.

Пример 3.3.1. Задача 2. Схема балки и результаты по шагам представлены на рис. 23. Следует отметить, что по ходу решения задачи, касательные усилия взаимодействия могут быть больше предельных на величину «пригруза» p .

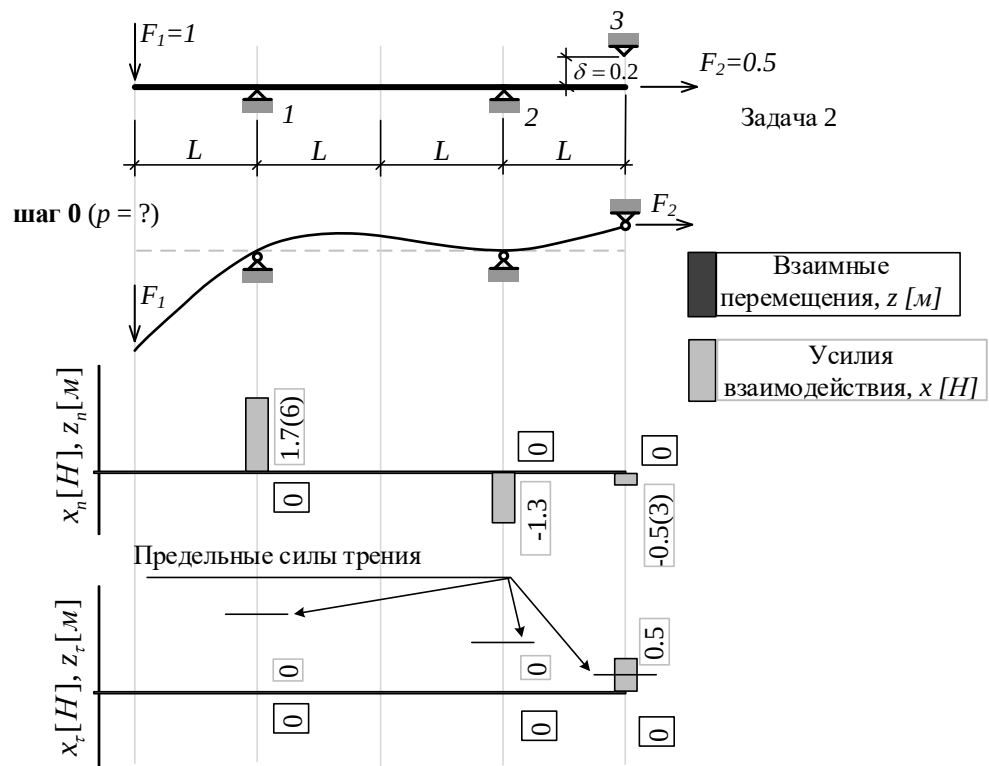
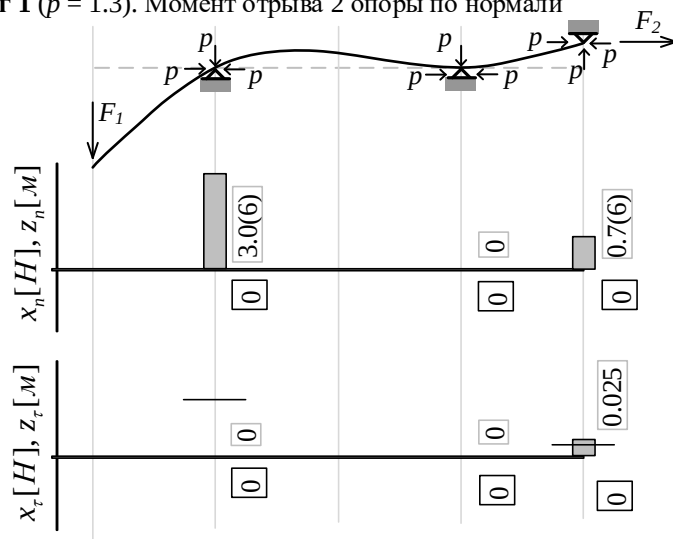


Рисунок 23. Начало.

шаг 1 ($p = 1.3$). Момент отрыва 2 опоры по нормали



шаг 2 ($p = 0.5$). Момент отрыва 3 опоры по касательной

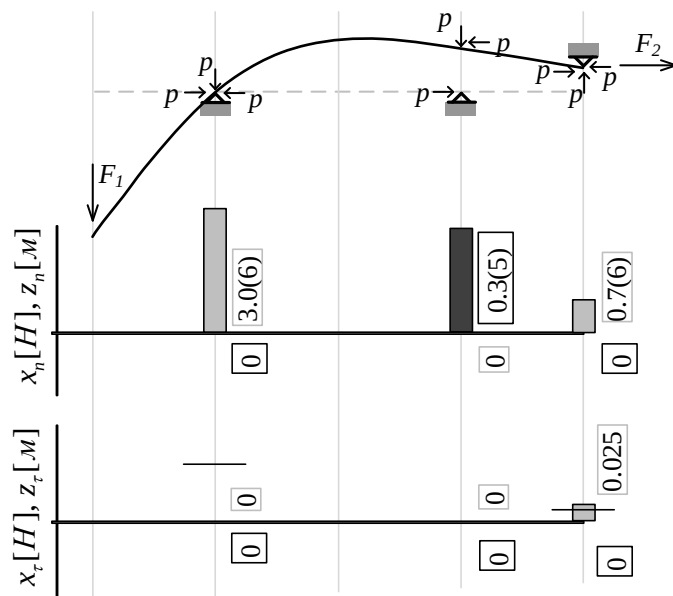
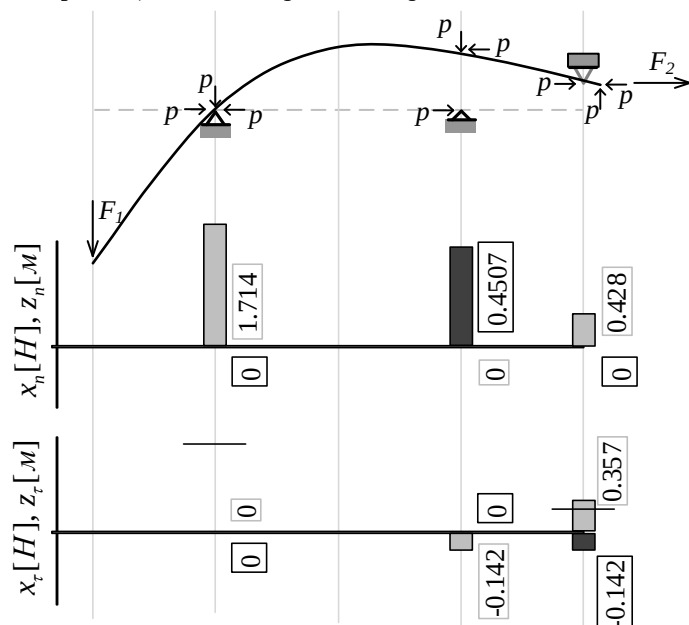


Рисунок 23. Продолжение.

шаг 3 ($p = 0.5$). Момент отрыва 2 опоры по касательной



шаг 4 ($p = 0$). Нормальное решение

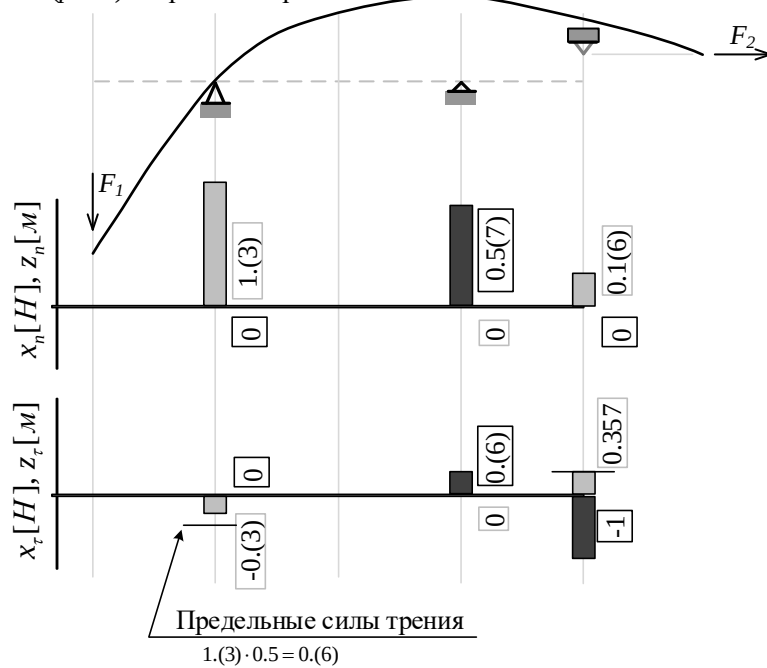


Рисунок 23. Окончание. – Балка на односторонних опорах с трением. Нормальное решение

Таблица метода Лемке имеет вид:

Шаг 0																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	p	R _c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0.75	0.5	7E-34	-1E-32	3E-17	-7E-34	1E-32	-3E-17	-1	1.766667	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.75	-2.25	-1.5	-5E-33	-1E-32	-9E-17	5E-33	1E-32	9E-17	-1	-1.3	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.5	-1.5	-1	-5E-33	1E-16	6E-17	5E-33	-1E-16	-6E-17	-1	-0.533333	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.125	0.375	0.25	-1.5	0.5	2E-17	1.5	-0.5	-2E-17	-1	0.883333	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.375	-1.13	-0.75	0.5	-1.5	-1	-0.5	1.5	1	-1	-0.65	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.25	-0.75	-0.5	-3E-33	-1	-1	3E-33	1	1	-1	0.233333	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.125	0.375	0.25	1.5	-0.5	2E-17	-1.5	0.5	-2E-17	-1	0.883333	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.375	-1.13	-0.75	-0.5	1.5	1	0.5	-1.5	-1	-1	-0.65	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.25	-0.75	-0.5	-3E-33	1	1	3E-33	-1	-1	-1	-0.766667	0

В начале алгоритма в базис попадает «пригруз» (искусственное обжатие) p и из базиса выходит x_{n2} (усилия взаимодействия второй контактной пары по нормали). Это соответствует моменту отрыва балки от второй опоры.

Шаг 1																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	p	R _c	min ratio
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	3	2	6E-33	4E-33	1E-16	-6E-33	-4E-33	-1E-16	0	3.066667	1.022222
18	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-0.75	2.25	1.5	5E-33	1E-32	9E-17	-5E-33	-1E-32	-9E-17	1	1.3	0.577778
2	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	-0.25	0.75	0.5	-4E-35	1E-16	2E-16	4E-35	-1E-16	-2E-16	0	0.766667	1.022222
3	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	-0.875	2.625	1.75	-1.5	0.5	1E-16	1.5	-0.5	-1E-16	0	2.183333	0.831746
4	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	-0.375	1.125	0.75	0.5	-1.5	-1	-0.5	1.5	1	0	0.65	0.577778
5	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-0.5	1.5	1	3E-33	-1	-1	-3E-33	1	1	0	1.533333	1.022222
6	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	-0.875	2.625	1.75	1.5	-0.5	1E-16	-1.5	0.5	-1E-16	0	2.183333	0.831746
7	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	-0.375	1.125	0.75	-0.5	1.5	1	0.5	-1.5	-1	0	0.65	0.577778
8	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-0.5	1.5	1	3E-33	1	1	-3E-33	-1	-1	0	0.533333	0.355556

На первом шаге из базиса выходит x_{r3}^- – усилие взаимодействия третьей контактной пары по касательной, удерживающие от смещения точки этой контактной пары против часовой стрелки, см. рис 1, б, в; и в базис попадает z_{n2} . Это интерпретируется как момент начала скольжения балки относительно третьей опоры и отрыв балки от второй опоры.

Шаг 2																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	p	R _c	min ratio
0	1	1	0	0	0	0	0	0	-2	6E-16	0	-7E-16	7E-34	-2	-2	-7E-34	2	2	0	2	1
18	0	0.5	0	0	0	0	0	0	-1.5	1E-16	0	7E-16	1E-33	-1.5	-1.5	-1E-33	1.5	1.5	1	0.5	0.333333
2	0	-0.5	1	0	0	0	0	0	-0.5	-2E-16	0	0	-1E-33	-0.5	-0.5	1E-33	0.5	0.5	0	0.5	1
3	0	0.75	0	1	0	0	0	0	-1.75	3E-16	0	0	-1.5	-1.25	-1.75	1.5	1.25	1.75	0	1.25	0.714286
4	0	-0.25	0	0	1	0	0	0	-0.75	6E-17	0	4E-16	0.5	-2.25	-1.75	-0.5	2.25	1.75	0	0.25	0.142857
5	0	-3E-16	0	0	0	1	0	0	-1	-1E-16	2E-16	4E-16	-1E-48	-2	-2	1E-48	2	2	0	1	0.5
6	0	0.75	0	0	0	0	1	0	-1.75	3E-16	0	0	1.5	-2.25	-1.75	-1.5	2.25	1.75	0	1.25	0.714286
7	0	-0.25	0	0	0	0	0	1	-0.75	6E-17	0	2E-16	-0.5	0.75	0.25	0.5	-0.75	-0.25	0	0.25	
10	0	-0.667	0	0	0	0	0	0	0.667	-0.333	1	0.667	2E-33	0.667	0.667	-2E-33	-0.667	-0.667	0	0.355556	

На втором шаге из базиса выходит x_{r2}^+ – усилие взаимодействия третьей контактной пары по касательной, удерживающее от смещения точки этой

контактной пары по ходу часовой стрелки; и в базис попадает $z_{\tau 3}^-$ – взаимные перемещение точек контактной пары 3 против хода часовой стрелки, см. рис 1, б, в). Это соответствует моменту начала скольжения балки относительно второй опоры и скольжению балки по третьей опоре.

Шаг 3																					
базис	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{\tau 1}^{+}$	$x_{\tau 2}^{+}$	$x_{\tau 3}^{+}$	$x_{\tau 1}^{-}$	$x_{\tau 2}^{-}$	$x_{\tau 3}^{-}$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{\tau 1}^{+}$	$z_{\tau 2}^{+}$	$z_{\tau 3}^{+}$	$z_{\tau 1}^{-}$	$z_{\tau 2}^{-}$	$z_{\tau 3}^{-}$	p	R_c	min ratio
0	1	1.2857	0	0	-1.14	0	0	0	-1.143	5E-16	0	-1E-15	-0.571	0.571	0	0.571	-0.571	0	0	1.714286	3
18	0	0.7143	0	0	-0.86	0	0	0	-0.857	6E-17	0	3E-16	-0.429	0.429	0	0.429	-0.429	0	1	0.285714	0.666667
2	0	-0.429	1	0	-0.29	0	0	0	-0.286	-2E-16	0	-1E-16	-0.143	0.143	0	0.143	-0.143	0	0	0.428571	3
3	0	1	0	1	-1	0	0	0	-1	3E-16	0	-4E-16	-2	1	0	2	-1	0	0	1	1
17	0	-0.143	0	0	0.571	0	0	0	-0.429	3E-17	0	3E-16	0.286	-1.286	-1	-0.286	1.286	1	0	0.142857	
5	0	0.2857	0	0	-1.14	1	0	0	-0.143	-2E-16	2E-16	-6E-17	-0.571	0.571	0	0.571	-0.571	0	0	0.714286	1.25
6	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3E-16	0	-4E-16	1	0	0	-1	0	0	0	1	
7	0	-0.286	0	0	0.143	0	0	1	-0.857	6E-17	0	3E-16	-0.429	0.429	0	0.429	-0.429	0	0	0.285714	0.666667
10	0	-0.762	0	0	0.381	0	0	0	0.381	-0.333	1	0.667	0.19	-0.19	0	-0.19	0.19	0	0	0.450794	

На третьем шаге из базиса выходит «пригруз» p и в базис попадает $z_{\tau 2}^+$ – взаимное перемещение точек контактной пары 2 в направлении по часовой стрелке, см. рис 1, б, в. Это соответствует полному снятию «пригруза» (обжатию) в контактных парах и смещению балки по касательной относительно второй опоры, от которой она оторвалась.

Илар	4																					
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{\tau 1}^+$	$x_{\tau 2}^+$	$x_{\tau 3}^+$	$x_{\tau 1}^-$	$x_{\tau 2}^-$	$x_{\tau 3}^-$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{\tau 1}^+$	$z_{\tau 2}^+$	$z_{\tau 3}^+$	$z_{\tau 1}^-$	$z_{\tau 2}^-$	$z_{\tau 3}^-$	p	R_c	min ratio	
0	1	0.3333	0	0	-0	0	0	0	-4E-16	4E-16	0	-2E-15	-2E-16	0	0	2E-16	0	0	-1.33	1.333333		
13	0	1.6667	0	0	-2	0	0	0	-2	1E-16	0	7E-16	-1	1	0	1	-1	0	2.333	0.666667		
2	0	-0.667	1	0	-0	0	0	0	-2E-16	-2E-16	0	-2E-16	-3E-17	0	0	3E-17	0	0	-0.33	0.333333		
3	0	-0.667	0	1	1	0	0	0	1	1E-16	0	-1E-15	-1	0	0	1	0	0	-2.33	0.333333		
17	0	2	0	0	-2	0	0	0	-3	2E-16	0	1E-15	-1	0	-1	1	0	1	3	1		
5	0	-0.667	0	0	-0	1	0	0	1	-3E-16	2E-16	-4E-16	-2E-16	0	0	2E-16	0	0	-1.33	0.333333		
6	0	1	0	0	-1	0	1	0	-1	3E-16	0	-4E-16	1	0	0	-1	0	0	0	1		
7	0	-1	0	0	1	0	0	1	-1E-16	1E-32	0	-5E-32	-1E-16	0	0	1E-16	0	0	-1	5.55E-17		
10	0	-0.444	0	0	6E-17	0	0	0	6E-17	-0.333	1	0.667	3E-17	0	0	-3E-17	0	0	0.444	0.577778		

На шаге четыре представлено окончательное решение ЛЗД.

Пример 3.3.1. Задача 3. Схема балки и результаты по шагам представлены на рис. 24.

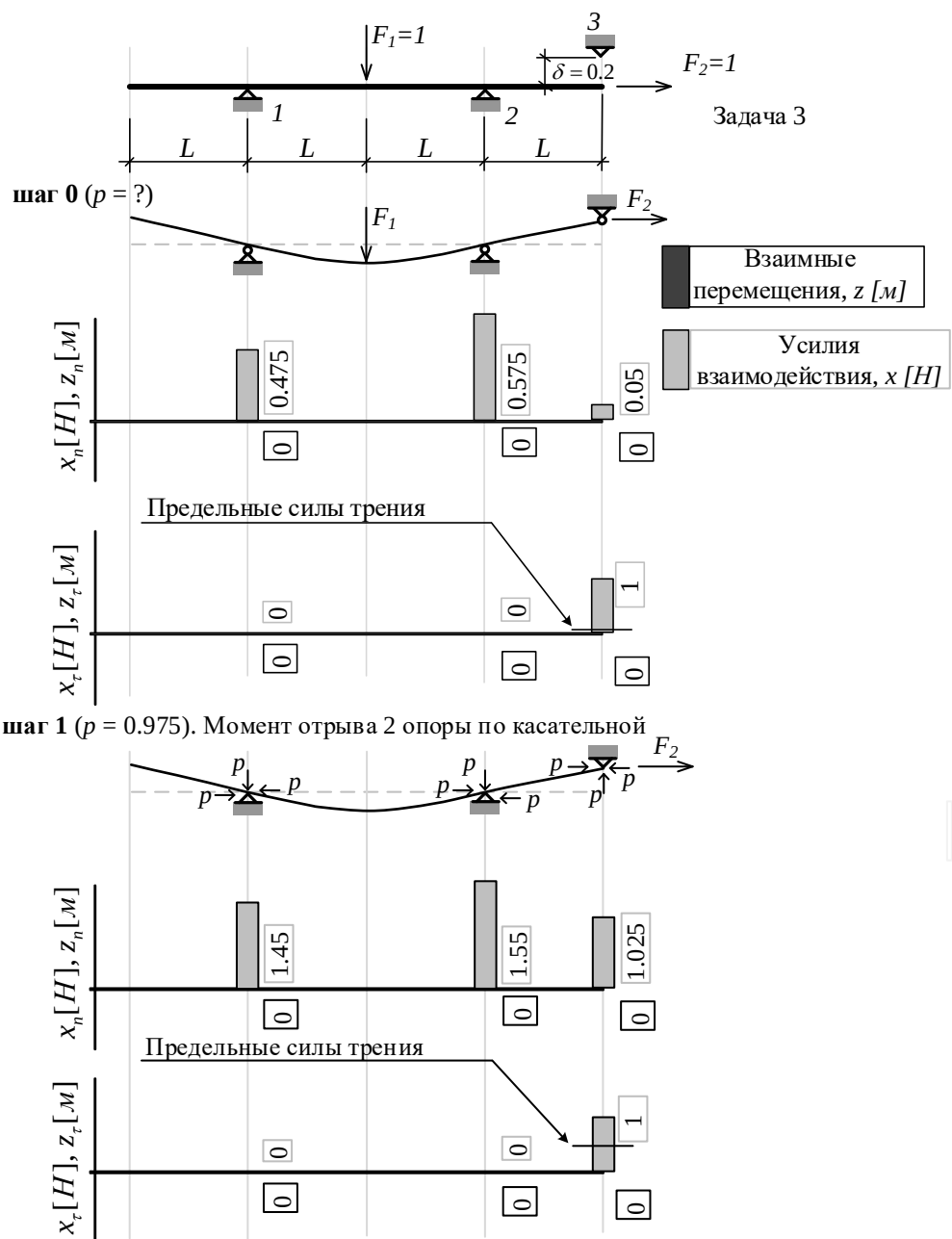


Рисунок 24. Начало

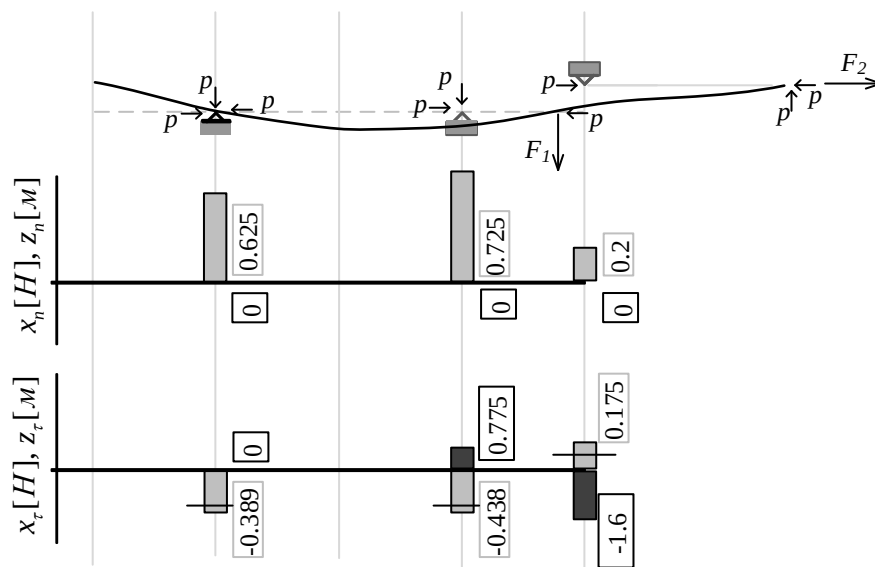
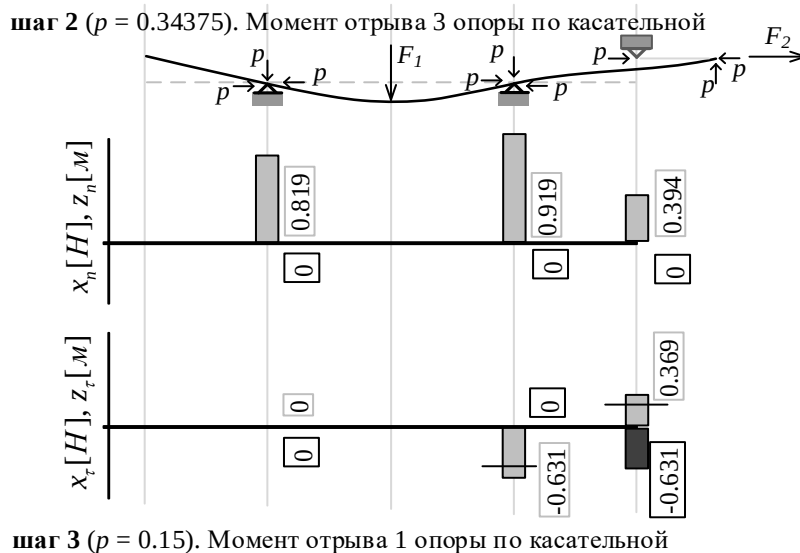


Рисунок 24. Окончание – Балка на односторонних опорах с трением. Лучевое решение

Таблица метода Лемке имеет вид:

Шаг 0																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{\tau 1}^+$	$x_{\tau 2}^+$	$x_{\tau 3}^+$	$x_{\tau 1}^-$	$x_{\tau 2}^-$	$x_{\tau 3}^-$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{\tau 1}^+$	$z_{\tau 2}^+$	$z_{\tau 3}^+$	$z_{\tau 1}^-$	$z_{\tau 2}^-$	$z_{\tau 3}^-$	p	R_c	min ratio	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0.75	0.5	-2E-33	-1E-32	3.1E-17	2E-33	1.1E-32	-3E-17	-1	0.475	0	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.75	-2.25	-1.5	4.8E-33	1.5E-32	-9E-17	-5E-33	-2E-32	9.2E-17	-1	0.575	0	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.5	-1.5	-1	2.2E-33	1.2E-16	6.1E-17	-2E-33	-1E-16	-6E-17	-1	0.05	0	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.125	0.375	0.25	-0.5	0.5	1.5E-17	0.5	-0.5	-2E-17	-1	0.2375	0	
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.375	-1.125	-0.75	0.5	-1.5	-1	-0.5	1.5	1	-1	0.2875	0	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.25	-0.75	-0.5	1.1E-33	-1	-1	-1E-33	1	1	-1	1.025	0	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.125	0.375	0.25	0.5	-0.5	1.5E-17	-0.5	0.5	-2E-17	-1	0.2375	0	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.375	-1.125	-0.75	-0.5	1.5	1	0.5	-1.5	-1	-1	0.2875	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.25	-0.75	-0.5	1.1E-33	1	1	-1E-33	-1	-1	-1	-0.975	0	

В начале алгоритма в базис попадает «пригруз» p и из базиса выходит $x_{\tau 3}^-$. Это интерпретируется как момент начала скольжения балки относительно третьей опоры.

IIIar 1																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{t_1}^+$	$x_{t_2}^+$	$x_{r_3}^+$	$x_{t_1}^-$	$x_{t_2}^-$	$x_{r_3}^-$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{t_1}^+$	$z_{t_2}^+$	$z_{r_3}^+$	$z_{t_1}^-$	$z_{t_2}^-$	$z_{r_3}^-$	p	R_c	min ratio	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.5	1.5	1	-3E-33	-1	-1	3.1E-33	1	1	0	1.45	1.45	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0.5	-1.5	-1	3.7E-33	-1	-1	-4E-33	1	1	0	1.55	1.55	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0.25	-0.75	-0.5	1.1E-33	-1	-1	-1E-33	1	1	0	1.025	1.025	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	-0.375	1.125	0.75	-0.5	-0.5	-1	0.5	0.5	1	0	1.2125	1.2125	
4	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0.125	-0.375	-0.25	0.5	-2.5	-2	-0.5	2.5	2	0	1.2625	0.63125	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	5.6E-17	-2E-16	2.2E-16	-7E-49	-2	-2	6.8E-49	2	2	0	2	1	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-0.375	1.125	0.75	0.5	-1.5	-1	-0.5	1.5	1	0	1.2125	1.2125	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0.125	-0.375	-0.25	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	1.2625		
18	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.25	0.75	0.5	-1E-33	-1	-1	1.1E-33	1	1	1	0.975	0.975	

На первом шаге из базиса выходит $x_{\tau_2}^+$ и в базис попадает $z_{\tau_3}^-$. Это интерпретируется как момент начала скольжения балки относительно второй опоры и скольжение балки по опоре три.

IIIar 2																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{t1}^{+}	x_{t2}^{+}	x_{t3}^{+}	x_{r1}^{-}	x_{r2}^{-}	x_{r3}^{-}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{t1}^{+}	z_{t2}^{+}	z_{t3}^{+}	z_{r1}^{-}	z_{r2}^{-}	z_{r3}^{-}	p	R_c	min ratio	
0	1	0	0	0	-0.5	0	0	0	-0.5	-0.5625	1.6875	1.125	-0.25	0.25	0	0.25	-0.25	0	0	0.81875	3.275	
1	0	1	0	0	-0.5	0	0	0	-0.5	0.4375	-1.3125	-0.875	-0.25	0.25	0	0.25	-0.25	0	0	0.91875	3.675	
2	0	0	1	0	-0.5	0	0	0	-0.5	0.1875	-0.5625	-0.375	-0.25	0.25	0	0.25	-0.25	0	0	0.39375	1.575	
3	0	0	0	1	-0.5	0	0	0	-0.5	-0.4375	1.3125	0.875	-0.75	0.75	0	0.75	-0.75	0	0	0.58125	0.775	
17	0	0	0	0	0.5	0	0	0	-0.5	0.0625	-0.1875	-0.125	0.25	-1.25	-1	-0.25	1.25	1	0	0.63125		
5	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	-0.125	0.375	0.25	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	0.7375	1.475	
6	0	0	0	0	-0.5	0	1	0	-0.5	-0.4375	1.3125	0.875	0.25	-0.25	0	-0.25	0.25	0	0	0.58125		
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0.125	-0.375	-0.25	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	1.2625	2.525	
18	0	0	0	0	-0.5	0	0	0	-0.5	-0.3125	0.9375	0.625	-0.25	0.25	0	0.25	-0.25	0	1	0.34375	1.375	

На втором шаге из базиса выходит $x_{\tau_1}^-$ и в базис попадает $z_{\tau_2}^-$. Это интерпретируется как момент начала скольжения балки относительно первой опоры и скольжение балки по второй опоре.

[illegible]

На третьем шаге алгоритма посчитать *минимальное отношение* для таблицы невозможно, все элементы *ведущего столбца* оказались отрицательными. Это означает лучевое решение, которое можно интерпретировать как невозможность дальнейшего уменьшения «пригруза» $p=0.15$, т.к. схема станет механизмом. Получено состояние равновесия с наименее возможным искусственным обжатием $p=0.15$ в контактных парах.

3.3.2. Алгоритм решения линейной задачи дополнительности для общего случая контакта с нарастающим параметром внешнего воздействия

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 25.

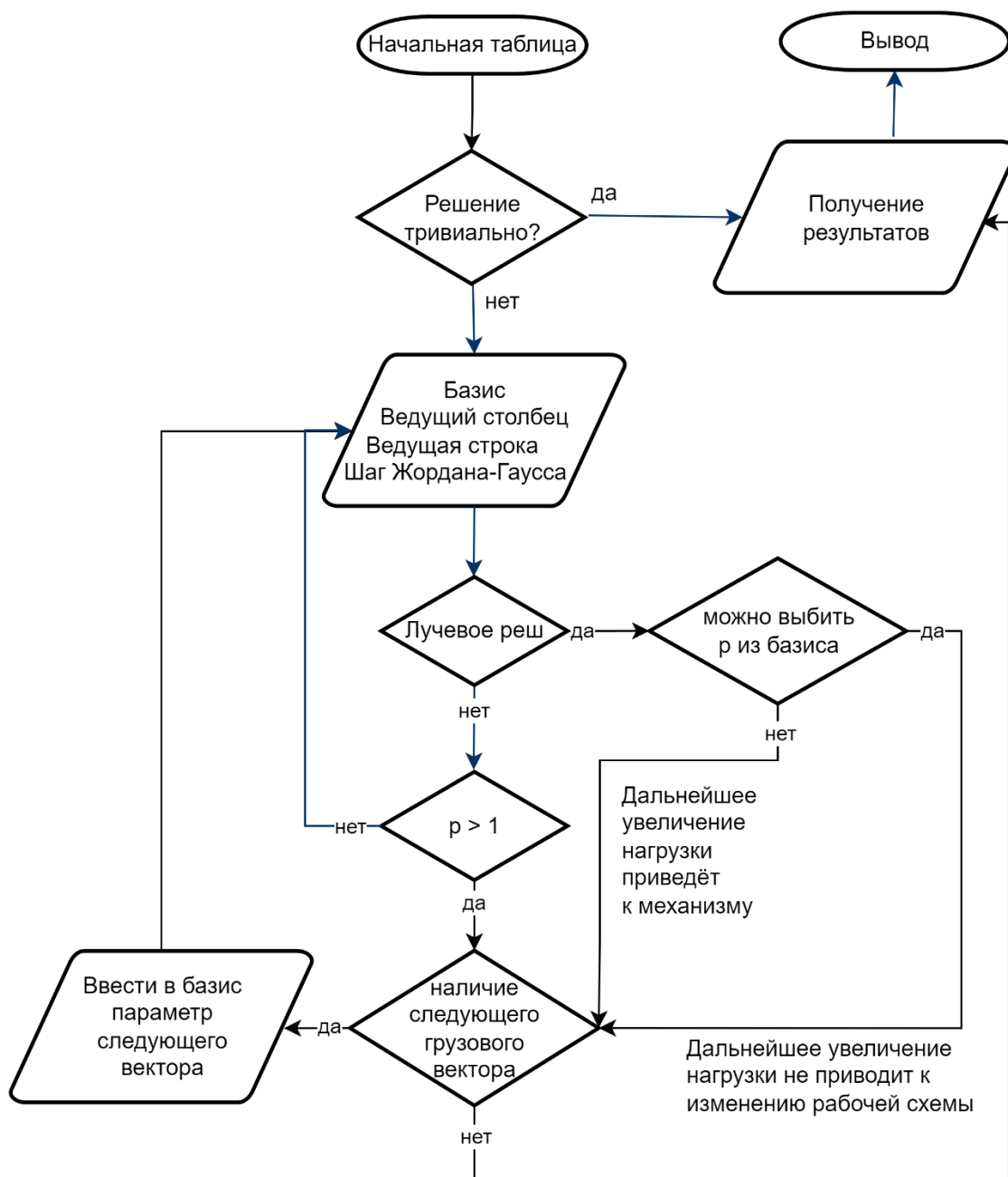


Рисунок 25 – Блок-схема. Алгоритм Лемке с нарастающим параметром силового воздействия

С учётом (15), запишем начальную таблицу в сокращённом виде:

$$[E \quad -R \quad -e] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \\ p \end{bmatrix} = 0,$$

Начальная таблица метода Лемке с нарастающим параметром внешнего воздействия имеет вид [133,155]:

$$[E \mid -R \mid -R_v] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \\ p \end{bmatrix} = 0,$$

где: R_v – контактный грузовой вектор $[3m \times 1]$, сформированный от заданного внешнего воздействия (m – количество контактных пар).

Для инициализации процесса решения (выбора ведущей строки), если отсутствует постоянная часть нагрузки R_c , вводится искусственное обжатие pc всех односторонних связей, и начальная таблица принимает вид:

$$[E \mid R \mid -R_v] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \\ p \end{bmatrix} = pc \cdot e,$$

где: $e = [1,1,...,1]$ – вектор размерностью $[3m \times 1]$.

Особенности решения алгоритмом Лемке с нарастающим параметром внешнего воздействия состоят в следующем. Сначала, на нулевом шаге, необходимо выбрать в качестве ведущего столбца R_v . Ведущая строка выбирается по правилу минимального отношения. Далее производятся стандартные шаги алгоритма Лемке.

Существуют два критерия остановки шагового процесса решения.

Критерий 1. Пусть на шаге k параметр стал больше единицы: $p > 1$. Критерий используется, если необходимо получить решение на заданное значение нагрузки (нагрузки, при котором формировался КГВ R_v). Для получения решения ЛЗД необходимо: вернуться к предыдущему шагу; вывести p из базиса; определить значения базисных переменных по формуле $-p \cdot R_v$, где $p = 1$.

Критерий 2. Пусть на шаге k получено лучевое решение (в том числе и на первом шаге алгоритма) при любом неотрицательном значении p_k . В этом случае

для получения решения ЛЗД необходимо вывести параметр p из базиса, выбирая соответствующую ведущую строку.

- Если при этом ведущий элемент оказывается не равен нулю, то: выводим p из базиса; определяем значения базисных переменных по формуле $-p \cdot \mathbf{R}_v$, где $p \geq p_k$. Физически полученный результат следует интерпретировать как невозможность изменения рабочей схемы при дальнейшем росте нагрузки. Если лучевое решение получено при $p < p_k$, а решение необходимо получить на заданное значение нагрузки, то необходимо принять $p = 1$.

- Если при этом ведущий элемент оказывается равен нулю, то при попытке вывода параметра p из базиса переменные оказываются неопределёнными. В этом случае на текущем шаге следует получить значения базисных переменных как $-p_k \cdot \mathbf{R}_v$. Физически полученный результат следует интерпретировать как превращение системы в механизм при дальнейшем росте нагрузки. Получаем предельное значение параметра нагрузки, соответствующего переходу системы в механизм.

В качестве внешнего воздействия предполагается: силовое воздействие $\mathbf{R}_f$ кинематическое воздействие $\mathbf{R}_\Delta$ и температурное воздействие $\mathbf{R}_t$. Разделим внешнее воздействие так что:

$$\mathbf{R}_f + \mathbf{R}_\Delta + \mathbf{R}_t = \mathbf{R}_c + p \cdot \mathbf{R}_v,$$

$\mathbf{R}_v, \mathbf{R}_c$ – контактные грузовые векторы от любой комбинации внешнего воздействия.

Таким образом, если предположить, что $\mathbf{R}_v = \mathbf{R}_f$, а $\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_\Delta + \mathbf{R}_t = 0$, то происходит моделирование параметрического роста силовой нагрузки.

Таблица метода Лемке в таком случае имеет вид:

	0	1	2	3	4	5	6		
	Столбец параметра нарастающей нагрузки						Грузовой вектор		
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	p	pR_v	min ratio
6	-1	0	0	1	-1.5	0.5	1	0.25	0.25
1	-1	1	0	2.5	-3.75	1.25	0	1.125	0.45
2	-1	0	1	0.5	-0.75	0.25	0	0.625	1.25

Ведущий столбец
(выделен серым)

Ведущая строка
(выделена серым)

Можно рассмотреть задачу, когда постоянная R_c и переменная R_v составляющие внешнего воздействия не равны нулю. Тогда методом Лемке задача сначала решается на действие постоянной нагрузки R_c методом, описанным в п. 3.3.1. После окончания шагового процесса в таблице вводится в базис переменная составляющая R_v грузового вектора и проводится решение по п. 3.3.2. Начальная таблица метода Лемке в таком случае имеет вид:

$$[E \quad R \quad e \quad -R_v] \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \\ p_c \\ p_v \end{bmatrix} = R_c$$

Пример 3.3.2. Задача 1. Рассматривается балка на односторонних опорах, расчётная схема и схема расположения нуль-элементов показаны на рис. 26. Постоянной нагрузкой является кинематическая нагрузка Δ_c , моделирующая выпучивание опоры. Переменной (возрастающей) нагрузкой является сосредоточенная сила на конце справа F_v .

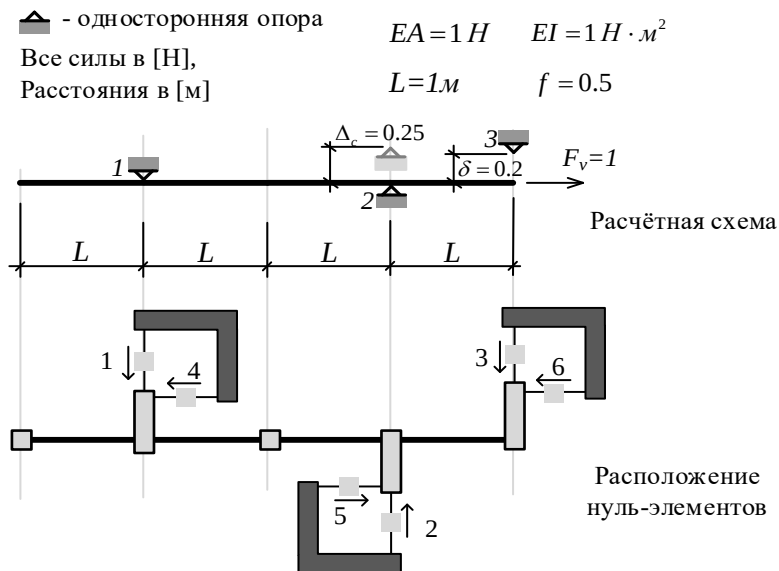


Рисунок 26 – Схема балки на односторонних опорах. Алгоритм с нарастающим параметром.

Результаты решения задачи по шагам на нарастающее значение внешнего силового воздействия показано на рис. 27.

шаг 0. Этап 1. ($p = 0$). Тривиальное решение

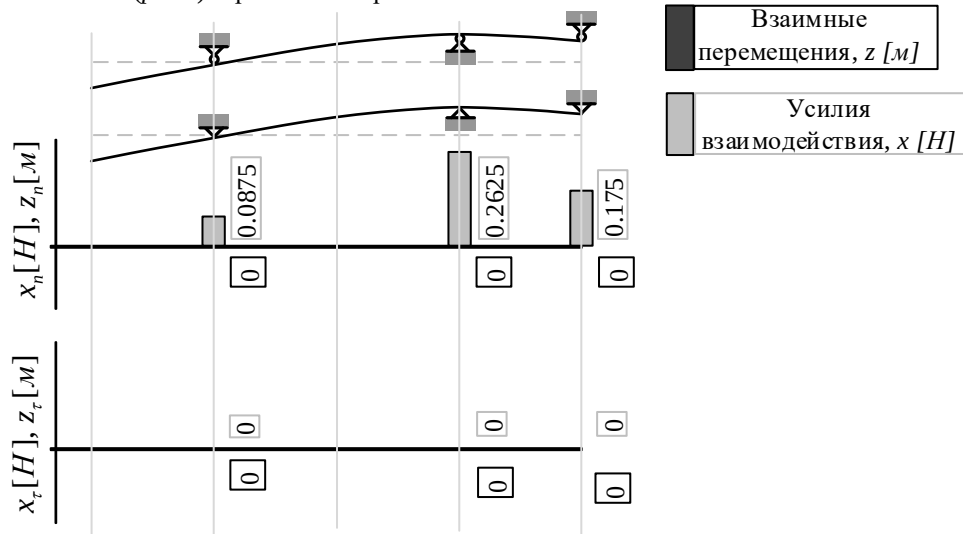
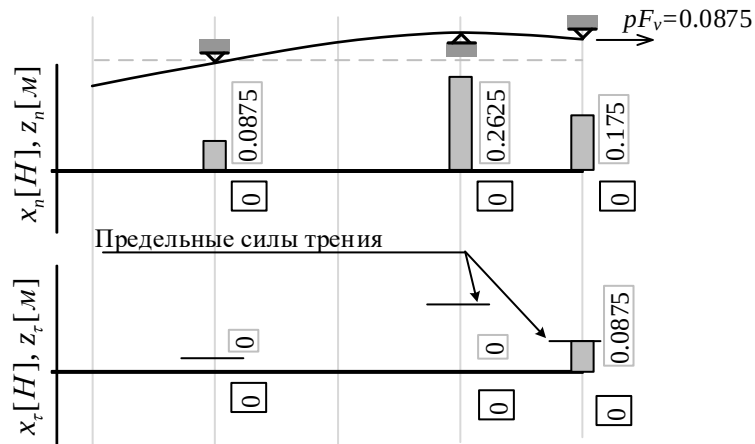
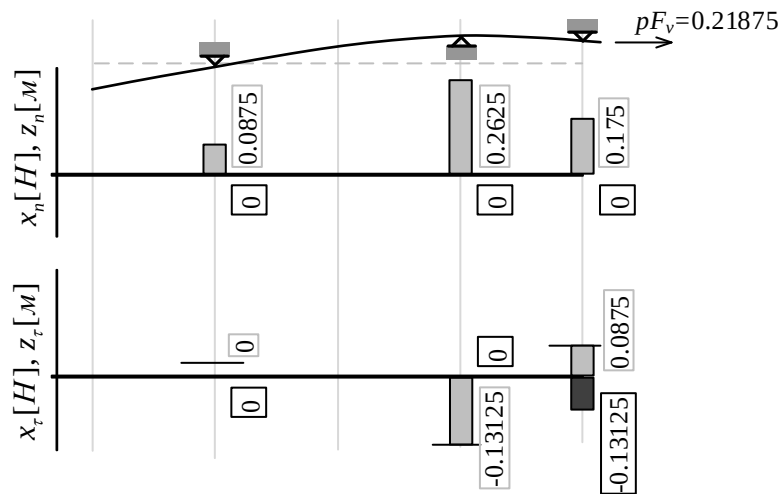


Рисунок 27 Начало

шаг 1. Этап 2 ($p = 0.0875$). Момент отрыва 3 опоры по касательной



шаг 2. Этап 2 ($p = 0.21875$). Момент отрыва 2 опоры по касательной



шаг 3. Этап 2 ($p = 0.2625$). Момент отрыва 1 опоры по касательной.
Лучевое решение

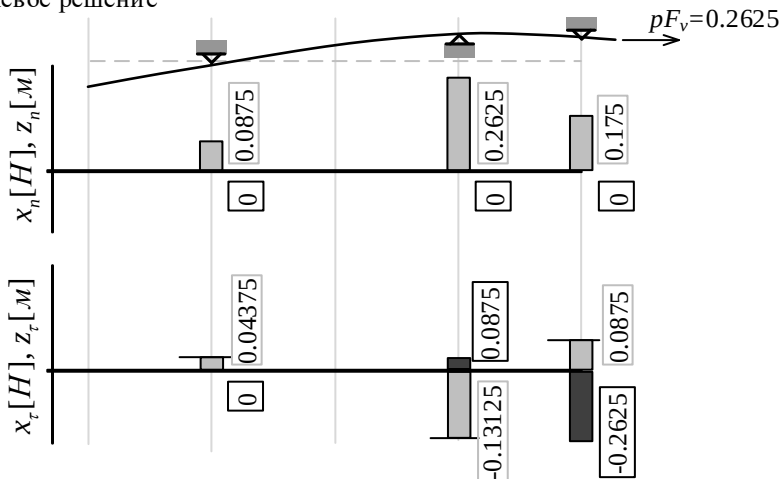


Рисунок 27 Окончание – Схема балки на односторонних опорах. Алгоритм с нарастающим параметром.

Таблица метода Лемке имеет вид:

Шаг 0 (этап 1)																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{t1}^+	x_{t2}^+	x_{t3}^+	x_{t1}^-	x_{t2}^-	x_{t3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{t1}^+	z_{t2}^+	z_{t3}^+	z_{t1}^-	z_{t2}^-	z_{t3}^-	p	pR_v	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	-0.75	-0.5	5E-17	6E-17	-3E-17	-5E-17	-6E-17	3E-17	-1	2.7E-32	0.0875	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0.75	-2.25	-1.5	-5E-17	9E-32	-9E-17	5E-17	-9E-32	9E-17	-1	5.4E-32	0.2625	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.5	-1.5	-1	-3E-17	1E-16	6E-17	3E-17	-1E-16	-6E-17	-1	1.2E-16	0.175	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.125	-0.375	-0.25	-0.5	-0.5	-2E-17	0.5	0.5	2E-17	-1	9.4E-33	0.04375	
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.375	-1.125	-0.75	-0.5	-1.5	-1	0.5	1.5	1	-1	1.6E-32	0.13125	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.25	-0.75	-0.5	-2E-17	-1	-1	2E-17	1	1	-1	-1	0.0875	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.125	-0.375	-0.25	0.5	0.5	-2E-17	-0.5	-0.5	2E-17	-1	1.8E-32	0.04375	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.375	-1.125	-0.75	0.5	1.5	1	-0.5	-1.5	-1	-1	3.8E-32	0.13125	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.25	-0.75	-0.5	-2E-17	1	1	2E-17	-1	-1	-1	1	0.0875	0.0875

Все элементы грузового вектора R_c положительны, поэтому от постоянной нагрузки (выпучивание опоры) получаем тривиальное решение, на этом заканчивается первый этап. В этом случае выбираем следующий грузовой вектор с нарастающим параметром внешней нагрузки $p \cdot R_v$ и вводим параметр нарастающей нагрузки в базис. По правилу минимального отношения из базиса выходит x_{t3}^- . Это соответствует моменту начала проскальзывания балки на третьей опоре.

Шаг 1 (этап 2)																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{t1}^+	x_{t2}^+	x_{t3}^+	x_{t1}^-	x_{t2}^-	x_{t3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{t1}^+	z_{t2}^+	z_{t3}^+	z_{t1}^-	z_{t2}^-	z_{t3}^-	p	pR_v	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-3E-32	-0.25	-0.75	-0.5	5E-17	6E-17	-3E-17	-5E-17	-6E-17	3E-17	-1	0	0.0875	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	-5E-32	-0.75	-2.25	-1.5	-5E-17	3E-32	-9E-17	5E-17	-3E-32	9E-17	-1	0	0.2625	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1E-16	-0.5	-1.5	-1	-3E-17	2E-32	-6E-17	3E-17	-2E-32	6E-17	-1	0	0.175	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	-9E-33	-0.125	-0.375	-0.25	-0.5	-0.5	-2E-17	0.5	0.5	2E-17	-1	0	0.04375	
4	0	0	0	0	1	0	0	0	-2E-32	-0.375	-1.125	-0.75	-0.5	-1.5	-1	0.5	1.5	1	-1	0	0.13125	0.13125
5	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-0.5	-1.5	-1	-3E-17	0	-1E-16	3E-17	0	1E-16	-2	0	0.175	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	-2E-32	-0.125	-0.375	-0.25	0.5	0.5	-2E-17	-0.5	-0.5	2E-17	-1	0	0.04375	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	-4E-32	-0.375	-1.125	-0.75	0.5	1.5	1	-0.5	-1.5	-1	-1	0	0.13125	
19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.25	-0.75	-0.5	-2E-17	1	1	2E-17	-1	-1	-1	1	0.0875	

На первом шаге (этап 2) из базиса выходит x_{t2}^+ и в базис попадает z_{t3}^- . Это интерпретируется как момент начала проскальзывания балки относительно второй опоры и скольжение балки относительно третьей опоры.

Шаг 2 (этап 2)																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{t1}^+	x_{t2}^+	x_{t3}^+	x_{t1}^-	x_{t2}^-	x_{t3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{t1}^+	z_{t2}^+	z_{t3}^+	z_{t1}^-	z_{t2}^-	z_{t3}^-	p	pR_v	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	-3E-17	0	0	0	-3E-32	-0.25	-0.75	-0.5	6E-17	1E-16	0	-6E-17	-1E-16	0	-1	0	0.0875	
1	0	1	0	0	-9E-17	0	0	0	-5E-32	-0.75	-2.25	-1.5	6E-33	1E-16	0	-6E-33	-1E-16	0	-1	0	0.2625	
2	0	0	1	0	-6E-17	0	0	0	-1E-16	-0.5	-1.5	-1	0	9E-17	0	0	-9E-17	0	-1	0	0.175	
3	0	0	0	1	-2E-17	0	0	0	-9E-33	-0.125	-0.375	-0.25	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	0	-1	0	0.04375	
17	0	0	0	0	1	0	0	0	-2E-32	-0.375	-1.125	-0.75	-0.5	-1.5	-1	0.5	1.5	1	-1	0	0.13125	
5	0	0	0	0	-1E-16	1	0	0	1	-0.5	-1.5	-1	2E-17	2E-16	0	-2E-17	-2E-16	0	-2	0	0.175	
6	0	0	0	0	-2E-17	0	1	0	-2E-32	-0.125	-0.375	-0.25	0.5	0.5	0	-0.5	-0.5	0	-1	0	0.04375	0.0875
7	0	0	0	0	1	0	0	1	-5E-32	-0.75	-2.25	-1.5	0	0	0	0	0	0	-2	0	0.2625	
19	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-0.625	-1.875	-1.25	-0.5	-0.5	0	0.5	0.5	0	-2	1	0.21875	

На втором шаге (этап 2) из базиса выходит $x_{\tau 1}^{-}$ и в базис попадает $z_{\tau 2}^{-}$. Это интерпретируется как момент начала проскальзывания балки относительно первой опоры и скольжение балки по второй опоре.

Шаг 3 (этап 2)																						
basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{\tau 1}^{+}$	$x_{\tau 2}^{+}$	$x_{\tau 3}^{+}$	$x_{\tau 1}^{-}$	$x_{\tau 2}^{-}$	$x_{\tau 3}^{-}$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{\tau 1}^{+}$	$z_{\tau 2}^{+}$	$z_{\tau 3}^{+}$	$z_{\tau 1}^{-}$	$z_{\tau 2}^{-}$	$z_{\tau 3}^{-}$	p	pR_v	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	-3E-17	0	-2E-16	0	-3E-32	-0.25	-0.75	-0.5	-5E-17	0	0	5E-17	0	0	-1	0	0.0875	
1	0	1	0	0	-9E-17	0	-3E-16	0	-5E-32	-0.75	-2.25	-1.5	-1E-16	0	0	1E-16	0	0	-1	0	0.2625	
2	0	0	1	0	-6E-17	0	-2E-16	0	-1E-16	-0.5	-1.5	-1	-9E-17	0	0	9E-17	0	0	-1	0	0.175	
3	0	0	0	1	-3E-17	0	1	0	-3E-32	-0.25	-0.75	-0.5	-6E-17	0	0	6E-17	0	0	-2	0	0.0875	
17	0	0	0	0	1	0	3	0	-7E-32	-0.75	-2.25	-1.5	1	0	-1	-1	0	1	-4	0	0.2625	
5	0	0	0	0	-1E-16	1	-3E-16	0	1	-0.5	-1.5	-1	-1E-16	0	0	1E-16	0	0	-2	0	0.175	
13	0	0	0	0	-3E-17	0	2	0	-4E-32	-0.25	-0.75	-0.5	1	1	0	-1	-1	0	-2	0	0.0875	
7	0	0	0	0	1	0	0	1	-5E-32	-0.75	-2.25	-1.5	0	0	0	0	0	0	-2	0	0.2625	
19	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-0.75	-2.25	-1.5	0	0	0	0	0	0	-3	1	0.2625	

На шаге три (этап 2) все элементы ведущего столбца не положительны (за исключением ошибок округления), что говорит о лучевом решении. Вследствие того, что параметр нарастающего внешнего воздействия $p \cdot R_v$ невозможно вывести из базиса (блок-схема рис. 25), делаем вывод о том, что дальнейшее увеличение нагрузки приведёт систему к механизму при величине силы $F_v = 0.2625H$.

Пример 3.3.2. Задача 2. Схема задачи представляет собой балку на трёх односторонних опорах (рис. 28). Нагрузкой является вертикальная сосредоточенная сила посередине правого пролёта. Алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия реализуется за 2 шага. Для инициализации шагового процесса вводится искусственное обжатие в каждой предполагаемой контактной паре $F_c = 1$.

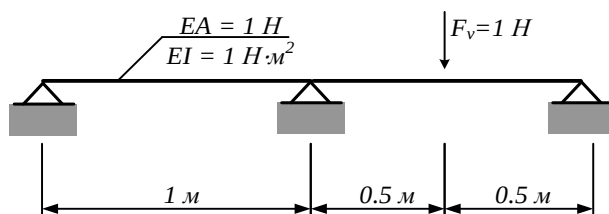


Рисунок 28 – Схема балки и результаты решения

Начальная таблица (шаг 0) имеет вид:

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	pR_v	R_c	min ratio
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.19	0.375	-0.1875	0	0	0	0	0	0	0.09375	1	10.66667
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.375	-0.75	0.375	0	0	0	0	0	0	-0.6875	1	
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.19	0.375	-0.1875	0	0	0	0	0	0	-0.40625	1	
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-0.11	0.225	-0.1125	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0.05625	1	17.77778
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.225	-0.45	0.225	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	-0.4125	1	
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.11	0.225	-0.1125	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	-0.24375	1	
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.11	0.225	-0.1125	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	0.05625	1	17.77778
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.225	-0.45	0.225	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	-0.4125	1	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.11	0.225	-0.1125	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	-0.24375	1	

В начале алгоритма выбирается $p \cdot R_v$ столбец в качестве ведущего. В базис попадает $p \cdot R_v$ и из базиса выходит x_{n1} . Наступает момент отрыва левой опоры (выход из базиса x_{n1} , что свидетельствует о равенстве нулю усилия взаимодействия x_{n1}).

Таблица принимает вид (шаг 1):

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{r1}^+	x_{r2}^+	x_{r3}^+	x_{r1}^-	x_{r2}^-	x_{r3}^-	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	z_{r1}^+	z_{r2}^+	z_{r3}^+	z_{r1}^-	z_{r2}^-	z_{r3}^-	pR_v	R_c	min ratio
19	10.667	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	4	-2	0	0	0	0	0	0	1	10.6667	
1	7.3333	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	8.33333	
2	4.3333	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	5.33333	
3	-0.6	0	0	1	0	0	0	0	0	1E-17	0	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	0	0.4	
4	4.4	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.6	1.2	-0.6	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	0	5.4	
5	2.6	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.6	1.2	-0.6	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	3.6	
6	-0.6	0	0	0	0	0	1	0	0	1E-17	0	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	0	0.4	
7	4.4	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.6	1.2	-0.6	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	0	5.4	
8	2.6	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.6	1.2	-0.6	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	3.6	

На первом шаге (рис. 29, а) параметр возрастает до $p=10.(6)$. При такой величине параметра внешней нагрузки наступает момент отрыва левой опоры. В базис попадает z_{n1} . Компоненты ведущего столбца отрицательны за исключением двух малых положительных величин. Эти величины есть следствие ошибок округления, поэтому они полагаются равными нулю. Таким образом, среди компонентов ведущего столбца нет положительных, следовательно, получается лучевое решение (рис. 29, б). В данном случае лучевое решение можно интерпретировать как невозможность изменения рабочей схемы при дальнейшем увеличении параметра нагрузки (блок-схема рис. 25). Для получения решения следует вывести параметр p из базиса (выбрать в качестве ведущей строки верхнюю, где в базисе находится 19 элемент) и учесть только переменную часть внешнего воздействия: $p \cdot F_v; F_c = 0$. Окончательная таблица (шаг 2):

basis	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$x_{\tau1}^+$	$x_{\tau2}^+$	$x_{\tau3}^+$	$x_{\tau1}^-$	$x_{\tau2}^-$	$x_{\tau3}^-$	z_{n1}	z_{n2}	z_{n3}	$z_{\tau1}^+$	$z_{\tau2}^+$	$z_{\tau3}^+$	$z_{\tau1}^-$	$z_{\tau2}^-$	$z_{\tau3}^-$	pR_v	R_c	min ratio
9	-5.333	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	-0.5	-5.3333	
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4E-15	-7E-16	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	
2	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-3E-15	1E-15	0	0	0	0	0	0	-0.5	-2E-15	
3	-0.6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3E-17	-1E-17	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	0	6.94E-18	0.4	
4	1.2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3E-15	-3E-16	0.5	-1	0.5	-0.5	1	-0.5	-0.3	2.2	
5	-0.6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2E-15	8E-16	0	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	-0.3	0.4	
6	-0.6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3E-17	-1E-17	0.5	-0.5	0	-0.5	0.5	0	6.94E-18	0.4	
7	1.2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3E-15	-3E-16	-0.5	1	-0.5	0.5	-1	0.5	-0.3	2.2	
8	-0.6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2E-15	8E-16	0	-0.5	0.5	0	0.5	-0.5	-0.3	0.4	

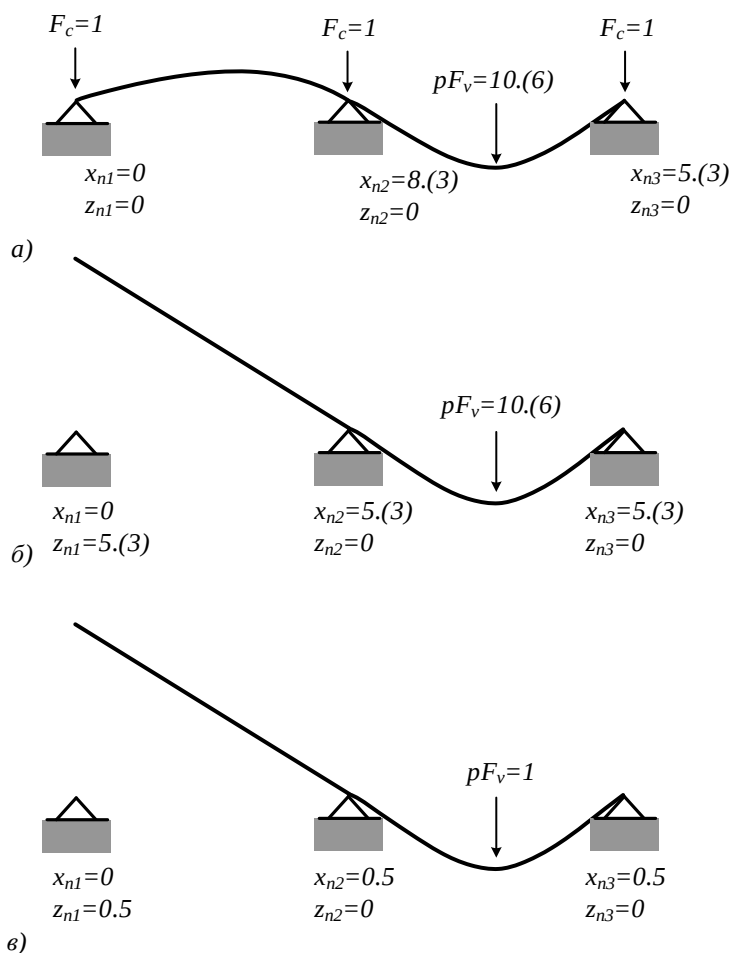


Рисунок 29 – Схема балки и результаты решения

Для этого примера, можно получить решение задачи для любого значения параметра p . Например: для нагрузки $p \cdot F_v = 1$ после вывода параметра p из базиса принять $p = 1$ и получить базисные переменные соответственно $-1 \cdot R_v$ (рис. 29, в).

Выводы по третьей главе.

1. Обоснован выбор и описана базовая реализация шагового метода Лемке для решения задач контакта, сформулированных во второй главе в виде линейной задачи дополненности.

2. Разработаны и описаны новые алгоритмы для решения задачи контакта с трением в виде ЛЗД:

- алгоритм с искусственно введённым обжатием (начальным «пригрузом» p);
- алгоритм с нарастающим параметром внешнего воздействия, позволяющий моделировать нарастание внешнего воздействия.

3. Показано, что новые методы решения контактных задач способны находить решение для задач с вырожденной контактной матрицей жёсткости. Для алгоритмов сформулированы новые правила выбора ведущей строки, необходимые для корректного учёта одновременного отрыва (касания) нескольких контактных пар и выхода параметра «пригруза» из базиса.

4. Применен нуль-элемент для формирования контактной матрицы жёсткости и контактного грузового вектора в рамках метода перемещений. Продемонстрировано, что его использование упрощает моделирование единичных дислокаций между точками контактной пары (в том числе для совпадающих узлов) и позволяет корректно моделировать системы, в которых тела могут перемещаться как жёсткое целое.

5. Разработана программная реализация (ContactLCP) решения контактных задач в формулировке ЛЗД на языке Python с использованием объектно-ориентированного подхода.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Для проверки предлагаемых алгоритмов расчёта задач одностороннего контакта с учётом трения рассматриваются модельные задачи, проводится сравнение с аналитическими решениями и с численными решениями, полученными верифицированными алгоритмами известных программных комплексов. Основным критерием выбора этих задач является сложность получения их решения для существующих и предлагаемого алгоритмов. Чаще всего это случаи, когда одно из тел способно перемещаться как жёсткое целое. Также рассматривались задачи, в которых деформируемые тела, по результатам решения, находятся в граничных состояниях (например, момент касания или отрыва какой-либо из опор).

Для сравнения численных решений, полученных разработанными алгоритмами и современными программными комплексами, использовался программный комплекс ANSYS. В нём реализованы алгоритмы решения, основанные на наиболее известных вариационных постановках задач контакта с трением. Он так же использует в своей основе метод конечных элементов, что позволит корректно сравнить результаты решения для одной задачи, полученные разными методами. Показано совпадение результатов решения на простых контактных задачах и недостатки современных методов их решения на сложных для алгоритмов случаях.

4.1. Аналитические задачи

Пример 4.1.1. В [124] получено аналитическое решение следующей задачи контакта с трением при известных предельных силах трения. Рассматривается стержень длиной L , который опирается на жёсткое основание (рис. 30, a). Постоянная прижимающая вертикальная равномерно распределённая нагрузка q . В

качестве нарастающей нагрузки рассматривается продольная сила на правом конце F_v .

Приведём сравнение аналитического решения с численным, полученным предлагаемым методом при $L = 260 \text{ м}$, $q = 3975 \text{ Н/м}$, $F_v = 243750 \text{ Н}$, модуль упругости $E = 1.95 \text{ е}10 \text{ Па}$, площадь поперечного сечения $A = 0.093619 \text{ м}^2$. Основание моделируется набором дискретных жёстких опор. Для моделирования консоли используется плоский рамный конечный элемент (КЭ) с тремя степенями свободы в узле. Консоль разбивается на $n = 10$ элементов. Узлы КЭ контактируют с опорами по схеме трения Кулона. Сосредоточенная вертикальная прижимающая сила в узле составляет $F_c = q \cdot \frac{L}{n} = 114833.(3)$. Коэффициент трения f принят равным 0.3. Результаты по продольным перемещениям стержня приведены на рис. 30, *b*.

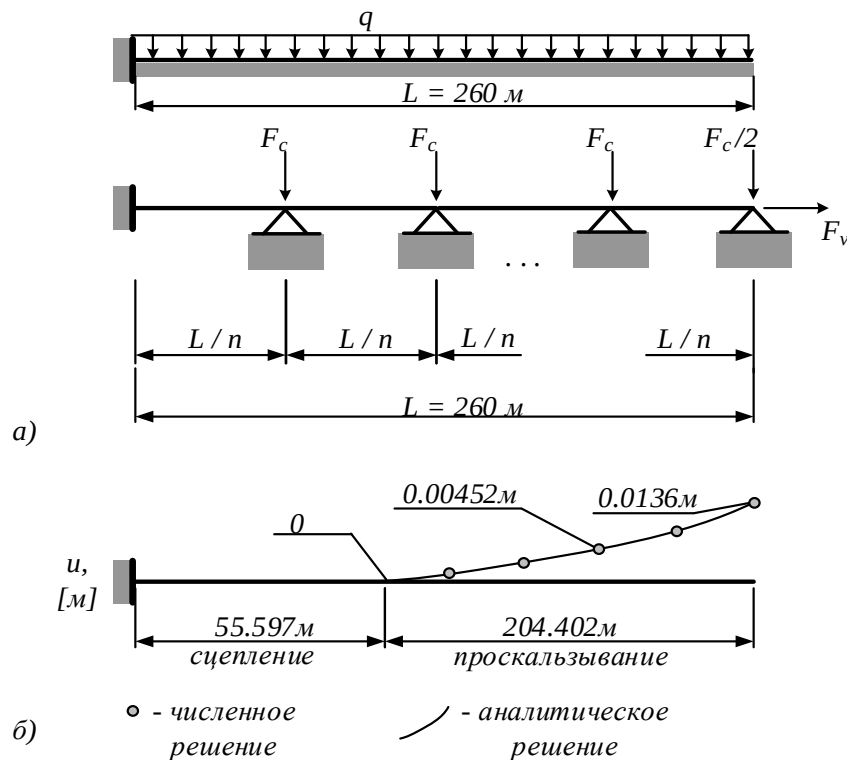


Рисунок 30 – Схема балки и результаты решения

Зависимость погрешности от количества принятых элементов n численной постановки показана в таблице ниже. Перемещения правого конца балки $u_{числ}$ (для

численного решения) и относительная погрешность u_{err} в зависимости от количества принятых элементов n показана в таблице ниже (расхождение результатов в знаках подчёркнуто). Перемещения правого конца балки в аналитическом решении $u_{аналит} = 0.13645835 \text{ м}$.

n	4	8	16	32	64	128	256	512
$u_{числ}, \text{ м}$	0.0133 <u>305</u>	0.0135 <u>346</u>	0.01364 <u>16</u>	0.01364 <u>26</u>	0.01364 <u>46</u>	0.0136458	0.013645 <u>7</u>	0.0136458 <u>3</u>
$u_{err}, \%$	1.95	1.13	4.65e-2	3.67e-2	2.52e-3	4.08e-4	9.16e-4	1.61e-4

Таким образом, для рассмотренного примера при сгущении сетки конечных элементов численное решение стремиться к точному.

Пример 4.1.2. Рассматривается классическая тестовая задача для алгоритмов решения задач одностороннего контакта. Балка на односторонних опорах [156] стр. 122.

Необходимо определить реакции опор (усилия взаимодействия) и перемещения балки в точках взаимодействия с опорами (взаимные перемещения). Представлена трехпролетная балка с заделкой одного торца слева и тремя жесткими односторонними опорами (рис. 31), работающими на сжатие, под действием сосредоточенных сил. Изгибная жесткость балки $EI = 44.5 \text{ тс} \cdot \text{м}^2$, нагрузки: $F1 = 0.70707 \text{ тс}$, $F2 = -4.3597 \text{ тс}$, $F3 = 2.1155 \text{ тс}$.

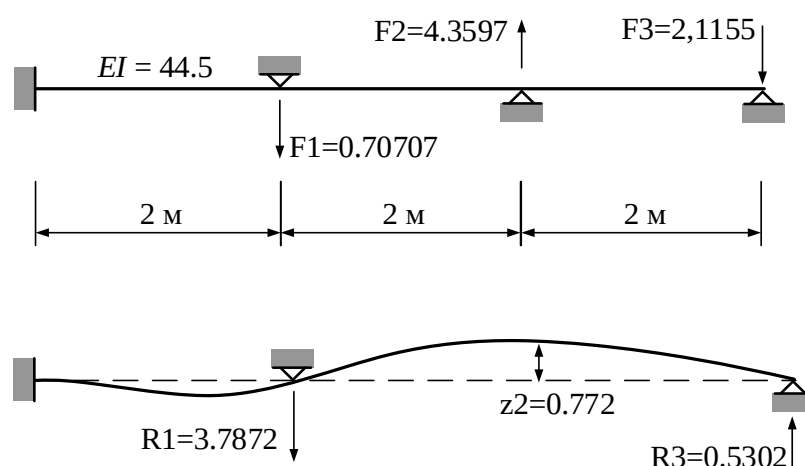


Рисунок 31 – Схема балки и результаты решения

Ниже показана таблица результатов, полученных аналитически, в ПК «ЛИРА-САПР» (взято из верификационного отчёта) и в разработанной программе ContactLCP.

Точка	Искомая величина	Аналитическое решение	ЛИРА	Погрешность ЛИРА, %	ContactLCP	Погрешность ContactLCP, %
2	z2, м	0.0772	0.077341	0.1826	0.0771891	0.0141
3	R1, т	3.7872	3.8594	1.9064	3.85079818	1.6793
4	R2, т	0.5302	0.5271	0.5881	0.53015455	0.0086

Следует отметить, что для решения подобных задач с односторонними жёсткими опорами, в программном комплексе ПК «ЛИРА-САПР» необходимо задаваться жёсткостью односторонних связей, влияющей на результаты расчёта. Также необходимо указывать количество шагов и итераций расчёта. В ПК «ЛИРА-САПР», согласно верификационному расчёту, для решения данной задачи задаётся 1 шаг, 1000 итераций и погонная жёсткость односторонних связей $EA/L = 1e6 \text{ тс} / \text{м}$. В ContactLCP решение получается за 2 шага, нет необходимости задавать жёсткость односторонних связей и параметры итерационного процесса. Разработанный метод решения контактных задач способен решать задачи как с трением, так и без трения.

4.2. Модельные задачи

Пример 4.2.1. Рассматривается свободно опёртая многопролётная балка на односторонних опорах с трением (рис. 32). Этот пример демонстрирует устойчивость счёта разработанного алгоритма, когда скольжение реализуется практически на всех контактных парах и позволяет одному из тел способно перемещаться как жёсткое целое. Балка аппроксимируется рамными плоскими стержневыми элементами с тремя степенями свободы в узле. Она загружена силами F , не меняющимися в процессе деформирования, что обеспечивает неизменность предельных сил трения $f \cdot F$ на опорах. Решение этой задачи очевидно:

- 1) при $F_2 \leq f \cdot F$ реализуется сцепление балки со всеми опорами;

2) при $f \cdot F < F_2 < 6f \cdot F$ на части опор реализуется проскальзывание, а на другой части – сцепление;

3) при $F_2 > 6f \cdot F$ реализуется проскальзывание на всех шести опорах и перемещения балки становятся неопределёнными;

4) при $F_2 = 6f \cdot F$ реализуются предельные силы трения на всех опорах, при этом перемещения на крайней левой опоре равно нулю, а на всех остальных опорах проскальзывание. Данный случай является наиболее сложным для алгоритмов.

В первом случае, согласно алгоритму получаем тривиальное решение : $z_n = 0$, $z_\tau^+ = 0$, $z_\tau^- = 0$, $x_n = R_{Fn}$, $x_\tau^+ = R_{F\tau} + f \cdot R_{Fn}$, $x_\tau^- = -R_{F\tau} + f \cdot R_{Fn}$. при этом $x_\tau = (x_\tau^+ - x_\tau^-)/2 = R_{F\tau}$ и $z_\tau = z_\tau^+ - z_\tau^- = 0$.

Во втором случае, с использованием алгоритма мы получаем нормальное решение, при котором как минимум одна опора находится в сцеплении с балкой, либо хотя бы на одной опоре реализуется проскальзывание балки. Результаты решения ЛЗД, при $F_2 = F = 100H$, для касательных взаимных перемещений (увеличен масштаб) и усилий взаимодействия (сил трения) на односторонних опорах представлены на рис. 32, а (в сплошной рамке показаны значения для усилий взаимодействия, а в пунктирных рамках - взаимные перемещения).

В третьем случае, в результате использования алгоритма, получаем «лучевое решение» при параметре $p > 0$. Это интерпретируется как разрушение системы: дальнейшее уменьшение «пригруза» p приведет к неопределённым перемещениям.

В четвёртом случае, результатом использования алгоритма может стать как конкретные усилия и перемещения в области контакта ($p = 0$, «нормальное решение»), так и «лучевое решение», что происходит из-за ошибок округления, параметр «пригруза» при этом $p \ll f \cdot F$ (эту ситуацию также следует интерпретировать как «нормальное решение»). Результаты решения ЛЗД при

$F_2 = 6 \cdot f \cdot F = 100H$ для касательных взаимных перемещений и усилий взаимодействия (сил трения) на односторонних опорах представлены на рис. 32, б. В этом случае отношение приложенного внешнего воздействия к «пригрузу» получилось: $F \cdot f/p > 10^{13}$, что можно трактовать как нормальное решение.

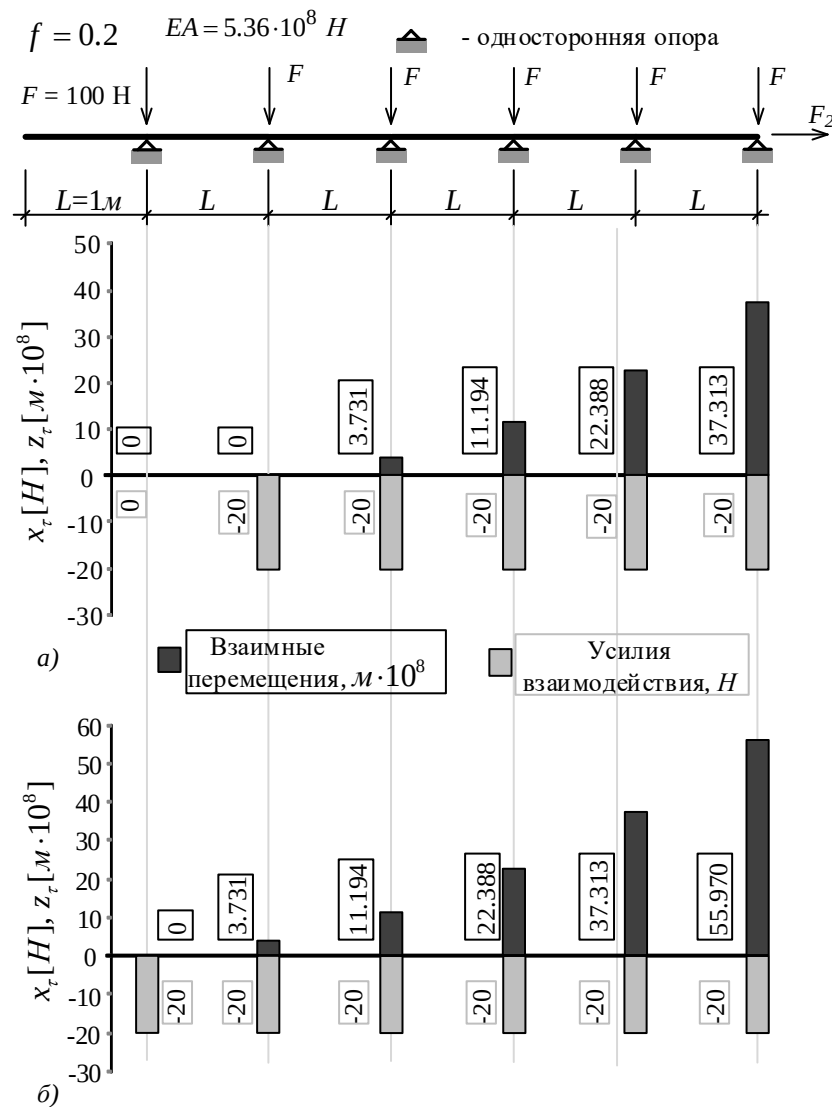


Рисунок 32 – Схема балки и результаты расчёта.

Пример 4.2.2. Рассматривается задача плоской деформации шпунтовой стенки в грунте с подстилающим слоем из скального грунта (рис. 33). Этот пример демонстрирует наиболее сложный случай для разработанных алгоритмов, когда при минимальном изменении параметра p («обжатии») происходит переключение рабочих схем, что приводит к накоплению ошибок округления (п. 3.3.1). Шпунтовая стенка взаимодействует с грунтом по обе стороны от неё по схеме

трения Кулона. На рис. 33 шпунтовая стенка и грунт условно разнесены. В качестве переменной нагрузки принята горизонтальная сосредоточенная сила в верхнюю часть шпунтовой стенки, собственный вес грунта не учитывается. Для грунта запрещены перемещения: по бокам горизонтальные; в основании вертикальные и горизонтальные. Свая в основании имеет шарнирно-неподвижную опору. Для моделирования шпунтовой стенки используется рамный элемент плоской задачи с тремя степенями свободы в узле, для грунта 4х узловой плоской задачи теории упругости. Коэффициент трения стали по грунту принят $f = 0.4$. Площадь поперечного сечения одного метра шпунта $A_r = 1.831e - 2 \text{ м}^2$, модуль упругости $E_r = 2e11 \text{ Па}$, Момент инерции $I_x = 1.0160e - 5 \text{ м}^4$. Для грунта: модуль упругости $E_r = 4.5e7 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.27$, толщина грунта $t = 1 \text{ м}$.

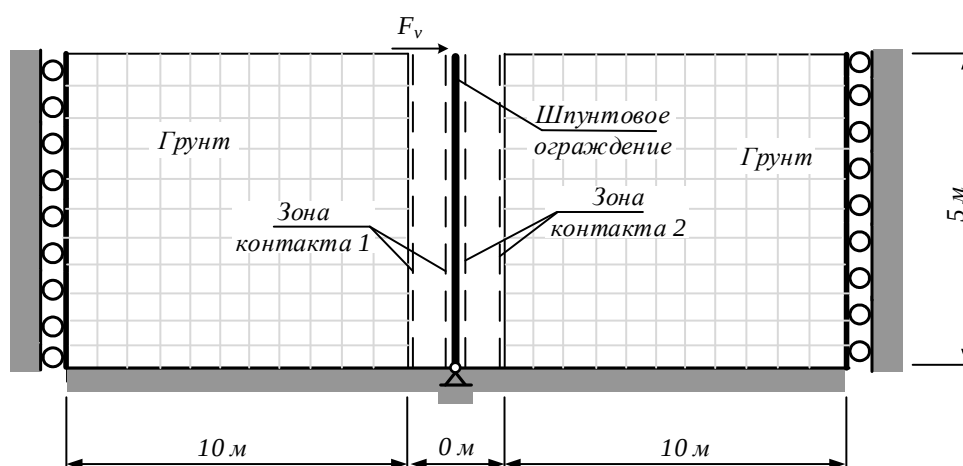


Рисунок 33 –Схема сваи в грунте

В этом примере параметр внешней нагрузки нарастает до получения лучевого решения при $p \cdot F_v = 213518$. Зоны отрыва шпунта от грунта появляются: в верхней части шпунта слева; нижней части шпунта справа. Зоны контакта появляются: в верхней части шпунта справа; в нижней части шпунта слева. При этом зона сцепления присутствует только слева в одном узле. Справа грунт скользит по шпунту (рис. 34).

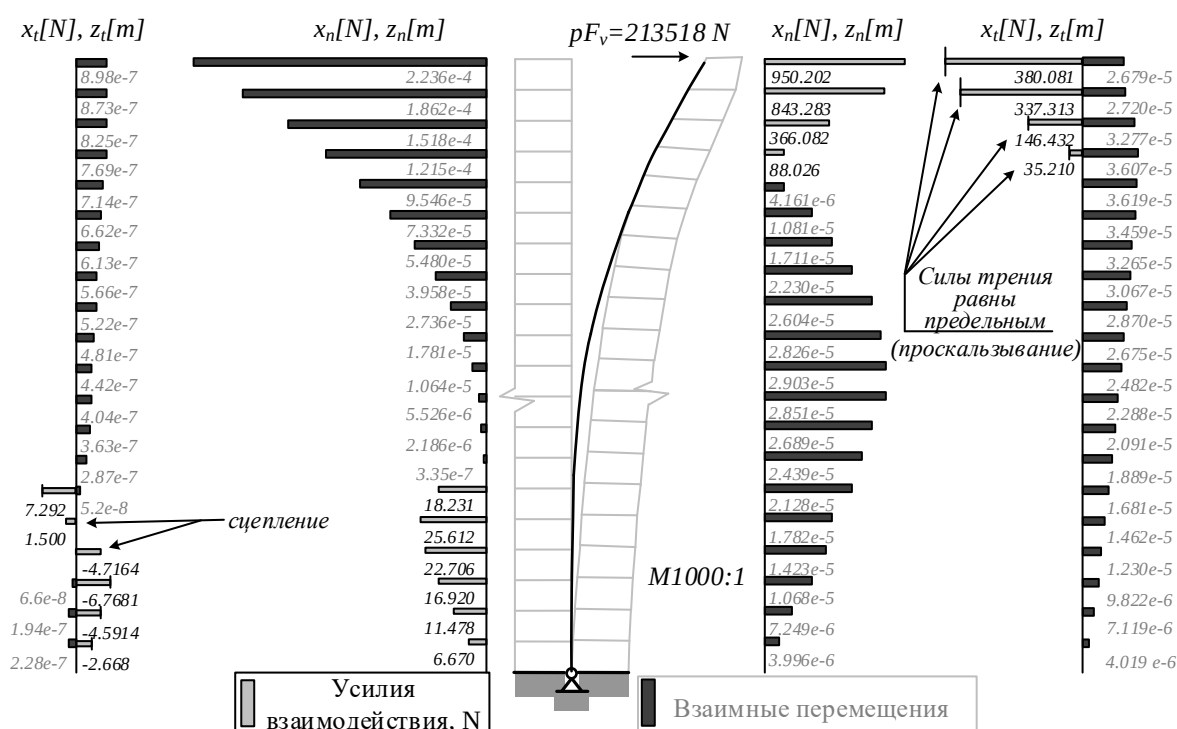


Рисунок 34 –Результаты решения

Отметим, что по результатам решения тестовых задач, выявлена следующая особенность алгоритма. В ходе шагового процесса разработанных алгоритмов возникает проблема сравнения с нулём. Появление малых величин обусловлено либо «физикой» задачи (малое приращение нагрузки, приводящее к смене рабочей схемы конструкции), либо ошибками округления, что приводит к проблеме поиска критерия отличия указанных малых величин от нуля. Для этого вводится единственный искусственный параметр точности остановки шагового процесса. Он определяет, насколько полученное значение предельной желаемой внешней нагрузки $p \cdot F_v$ может отличаться от точного значения в рамках дискретизованной задачи.

4.3. Сравнение полученных решений с ANSYS

Пример 4.3.1. Задача плоской деформации для пластин толщиной 0.1м, и размерами 8м на 4м (рис. 35). Для аппроксимации пластины использовался 4х узловой КЭ с двумя степенями свободы в узле. Размеры квадратных 4х узловых КЭ 0.5 x 0.5 м. Рассмотрены два случая условий опирания левой границы и жёсткой заделкой в основании нижней пластины.

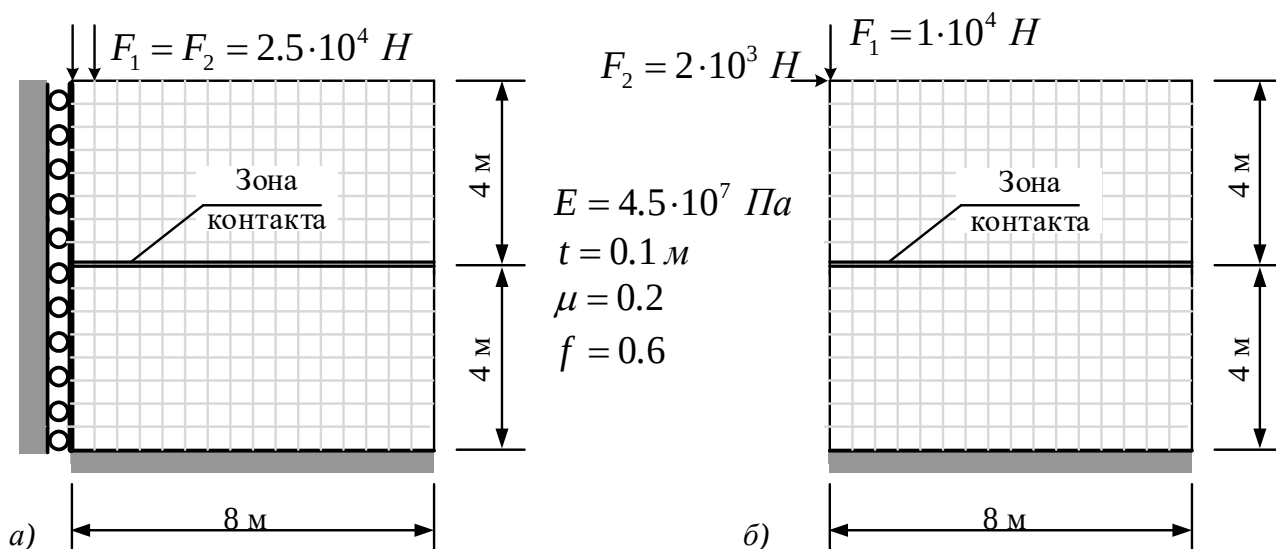


Рисунок 35 – Расчётная схема к расчёту задачи контакта пластин. а) с шарнирным опиранием слева, б) без опор слева

Использование КМЖ с КГВ с общим количеством неизвестных задачи равным 612, позволяет после формирования начальной таблицы метода Лемке работать всего с 48 неизвестными. В большинстве классических методах размер задачи одностороннего контакта определяет общее количество степеней свободы задачи. Результаты решения ЛЗД для одностороннего контакта с трением пластин с шарнирными опорами слева (рис. 36, а) и деформированной схемой (М50:1) показаны на рис. 36. (отметим, что результаты в точках контакта показаны начиная со второй опоры слева, т.к. первая опора зафиксирована от смещения). Результаты решения ЛЗД для пластин без опор слева (рис. 37, б) с дополнительной горизонтальной нагрузкой и контактом с трением по всей нижней границе верхней пластины (она может перемещаться как жёсткое целое) показаны на рис. 37. Отметим, что предельное трение реализуется и на самой левой контактной паре, этот случай похож на ситуацию 4 в примере 1 п. 4.2.

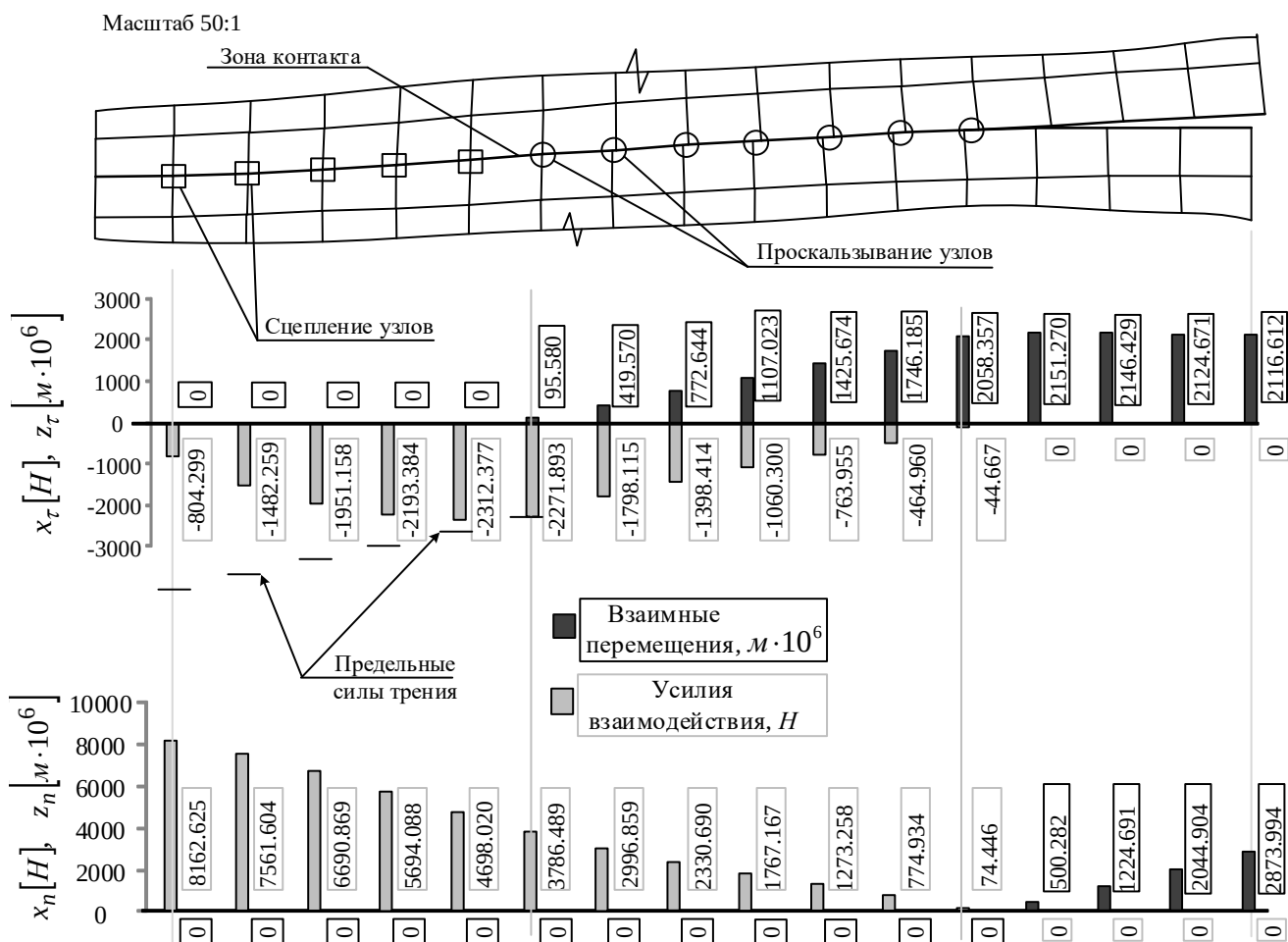


Рисунок 36 – Результаты по контакту пластин

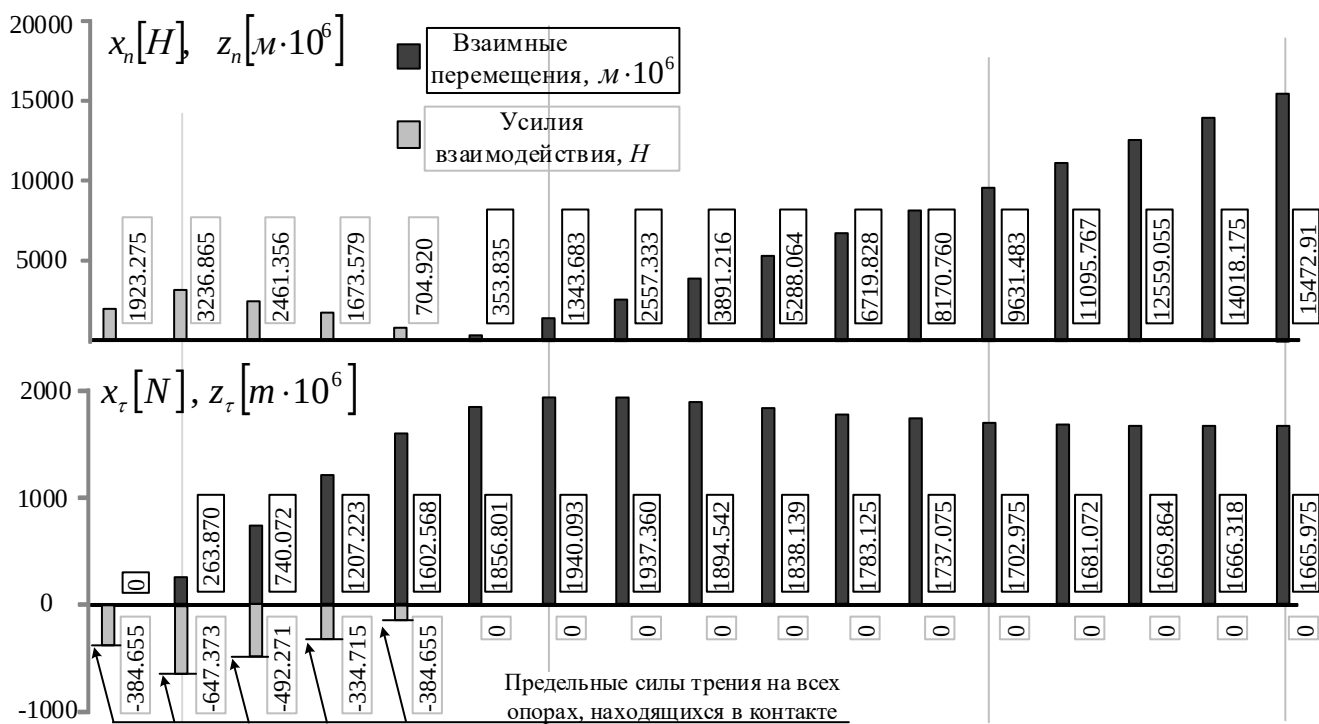


Рисунок 37 – Результаты ЛЗД для расчёта пластин без опор слева

Задача в первом случае (с шарнирными опорами слева рис. 36, а) посчитана так же с использованием ANSYS 18.2 Academic. Выяснилось, что параметрами контакта, наиболее влияющими на результаты, оказались Penetration Tolerance и Elastic Slip Tolerance. Уменьшение значений этих параметров сближает ANSYS-решение и решение, полученное с помощью предложенного в этой работе алгоритма. Таким образом, получение более точного ANSYS-решения требует тщательной настройки программы.

Второй случай, показанный на рис. 37, б, не может быть решён в ANSYS без добавления ограничений на перемещения для верхней пластины (необходимо зафиксировать её от смещения как жёсткого целого). Это происходит по причине наличия зоны скольжения практически по всей зоне контакта. Следует отметить, что возможность взаимопроникновения контактирующих тел [84,86] и требование тщательной настройки [75,93,96] обычная черта большинства современных широко распространённых программ, способных решить задачи одностороннего контакта с трением.

Пример 4.3.2. Задача представляет собой три вертикальные пластины одинаковых размеров и жёсткостей с равными зазорами между ними (рис. 38). Характеристики пластин: E – модуль упругости, t – толщина пластины, μ – коэффициент Пуассона. Решается задача плоского напряжённого состояния с помощью МКЭ. Для моделирования пластин используется плоский четырёх узловой конечный элемент (КЭ) с двумя степенями свободы в узле, размеры каждого элемента 0.25х0.25 метров. Коэффициент трения $f = 0.19$.

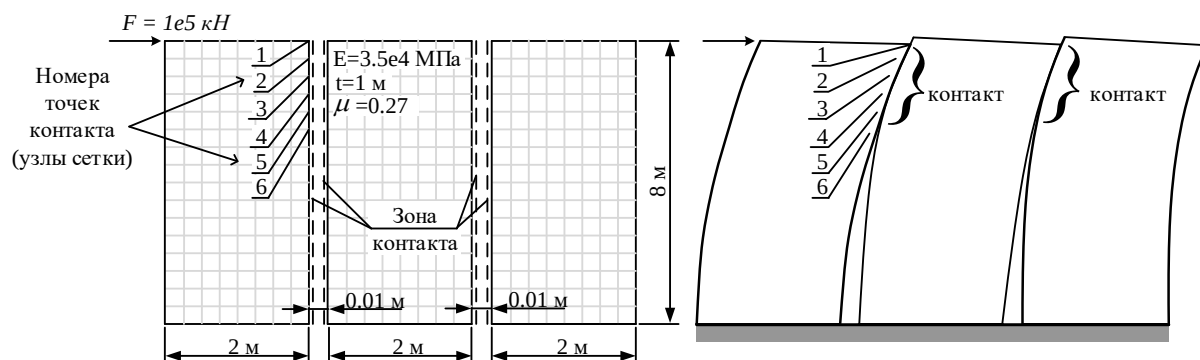


Рисунок 38 – Схема контактирующих пластин с зазорами.

Решение задачи получено в Python-программе ContactLCP [157] и в программном комплексе ANSYS для сравнения результатов. В обоих случаях использовались одинаковые элементы и сетка КЭ. Напряжения взаимодействия по нормали и по касательной к зоне контакта между левой и центральной пластиной приведены на рис. 39, 40.

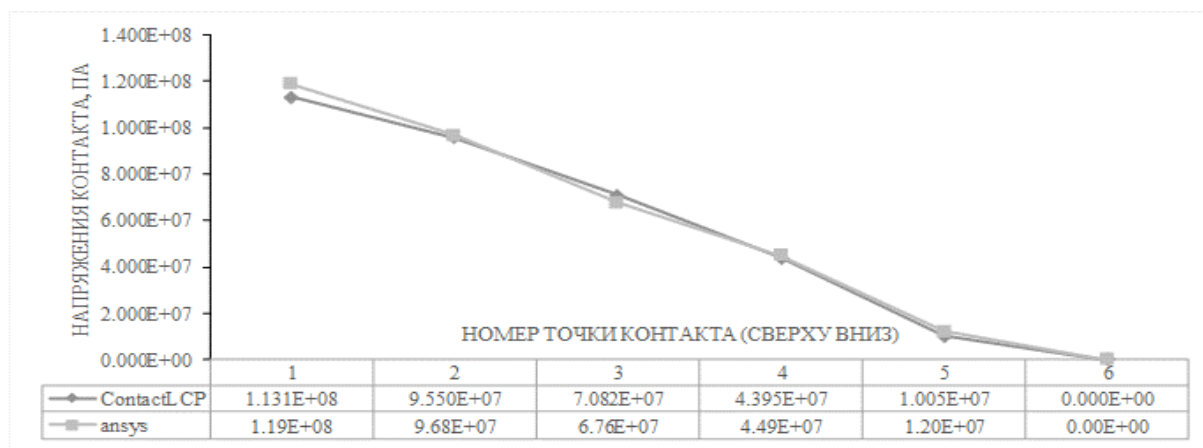


Рисунок 39 – Нормальные напряжения в зоне контакта

Для нормального напряжения в зоне контакта минимальная разница в результатах решений составляет 1.29% в точке контакта 2 (рис. 39). Максимальная разница составляет 16.2% в точке 5, такое расхождение в результатах объясняется близостью зоны отрыва (следующая точка 6, где усилия взаимодействия равны нулю).

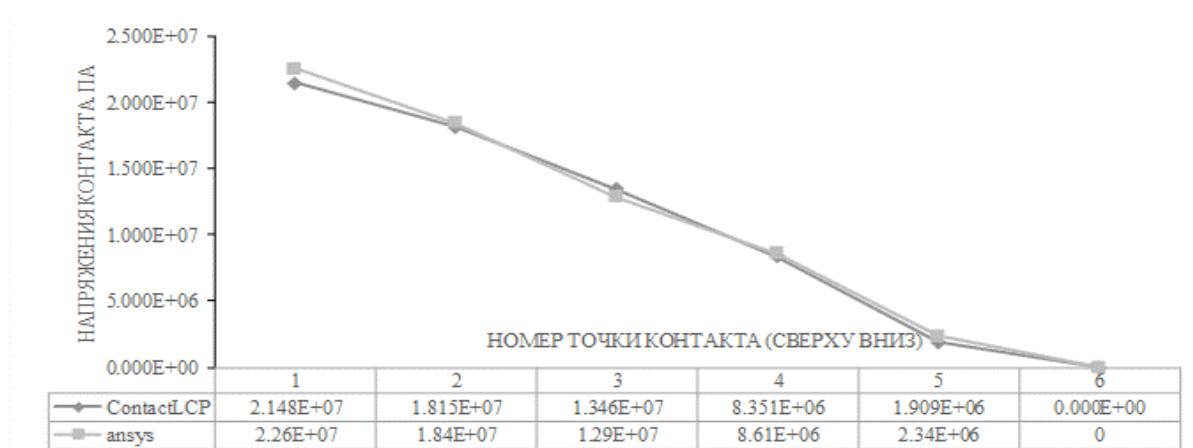


Рисунок 40 – Касательные напряжения в зоне контакта

Для касательного напряжения в зоне контакта минимальная разница в результатах решений составляет 1.53% в точке контакта 2 (рис. 40). Максимальная разница составляет 18.3% в точке 5.

Вывод: сравниваемые решения, полученные при помощи ANSYS и разработанного алгоритма, практически совпадают. Для получения решения ContactLCP потребовалось 142 шага, а ANSYS потребовалось 238 итераций.

Пример 4.3.3. Характерной особенностью алгоритмов решения контактных задач является сложность обеспечения сходимости решения: 1) при наличии концентраторов напряжений; 2) при наличии зоны проскальзывания по большей части зоны контакта, особенно когда одно из тел способно смещаться как жёсткое целое. Рассматриваемый пример демонстрирует недостатки распространённых методов решения контактных задач с трением, сравниваются результаты расчетов, полученные в ContactLCP с результатами расчёта, полученными в программном комплексе ANSYS, имеющем набор эффективных алгоритмов для решения задач контакта с трением.

Рассматривается плоское напряжённое состояние двух тел контактирующих с трением (рис. 41).

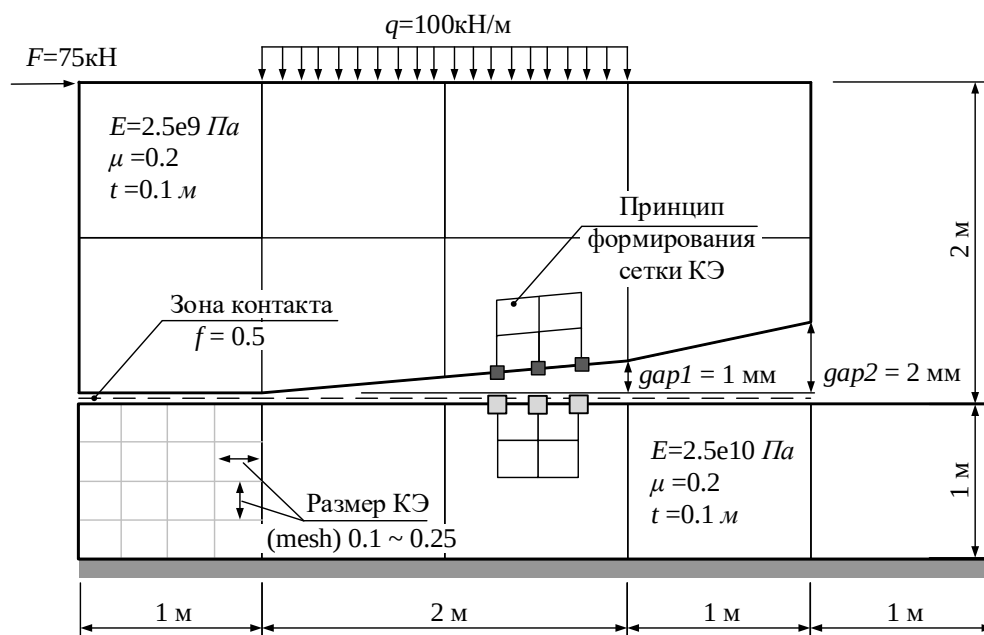


Рисунок 41 – Расчётная схема

На рисунке обозначены E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, t – толщина пластины, f – коэффициент трения, gap1 и gap2 – ненулевые зазоры. Узлы нижнего тела в основании закреплены от линейных смещений.

Контактирующие тела разбиваются на квадратные или близкие к ним четырёхугольные элементы так, чтобы реализовать контакт «узел в узел».

Решение в программном комплексе ANSYS зависит от сгущения сетки КЭ (mesh) и от настройки параметров контакта. При расчёте в ANSYS пользователь может задать ряд настраиваемых параметров, которые способны существенно повлиять на результаты решения, либо оставить все параметры программно-контролируемыми, и они будут подбираться автоматически, с учётом настроек, принятых разработчиком.

На рисунке 42 показана деформированная схема. Точки контакта пронумерованы слева направо от 1 до 161. В точках 121 и 161 возникают концентраторы напряжений (вследствие формы поверхности контакта верхнего тела). Так же показаны номера характерных точек отражающих положение зон отрыва (точки 1-56), скольжения (56-63) и сцепления (63-161). Расстояние между соседними точками контакта составляет 0.025 м.

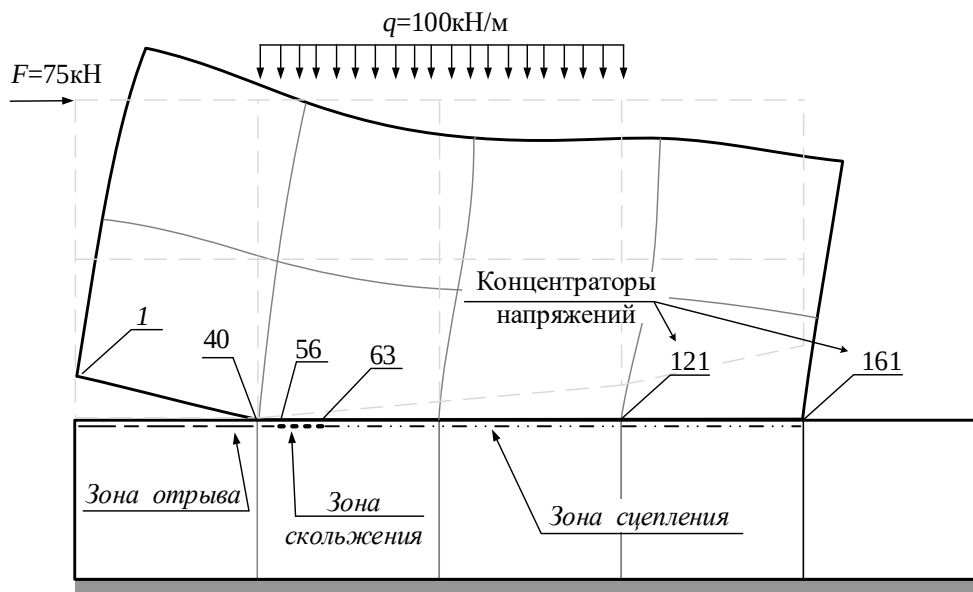


Рисунок 42 – Деформированная схема

На рисунке 43 показано сравнение результатов решения ContactLCP на «грубой» сетке с результатами ANSYS на «грубой» и «густой» сетке по нормальным напряжениям в зоне контакта. На графиках приведена легенда в виде «LCP 0.1», где LCP означает результаты, полученные в ContactLCP, а число

обозначает размер КЭ равный 0.1 м; «ansys 0.1» означает результаты, полученные в ПК ANSYS с размером КЭ равным 0.1 м. В зоне отрыва контактных напряжений не возникает, поэтому все графики здесь и далее показаны начиная с точки 41. Отметим, что при сгущении сетки КЭ решение ANSYS существенно приблизилось к решению, полученному в ContactCLP.

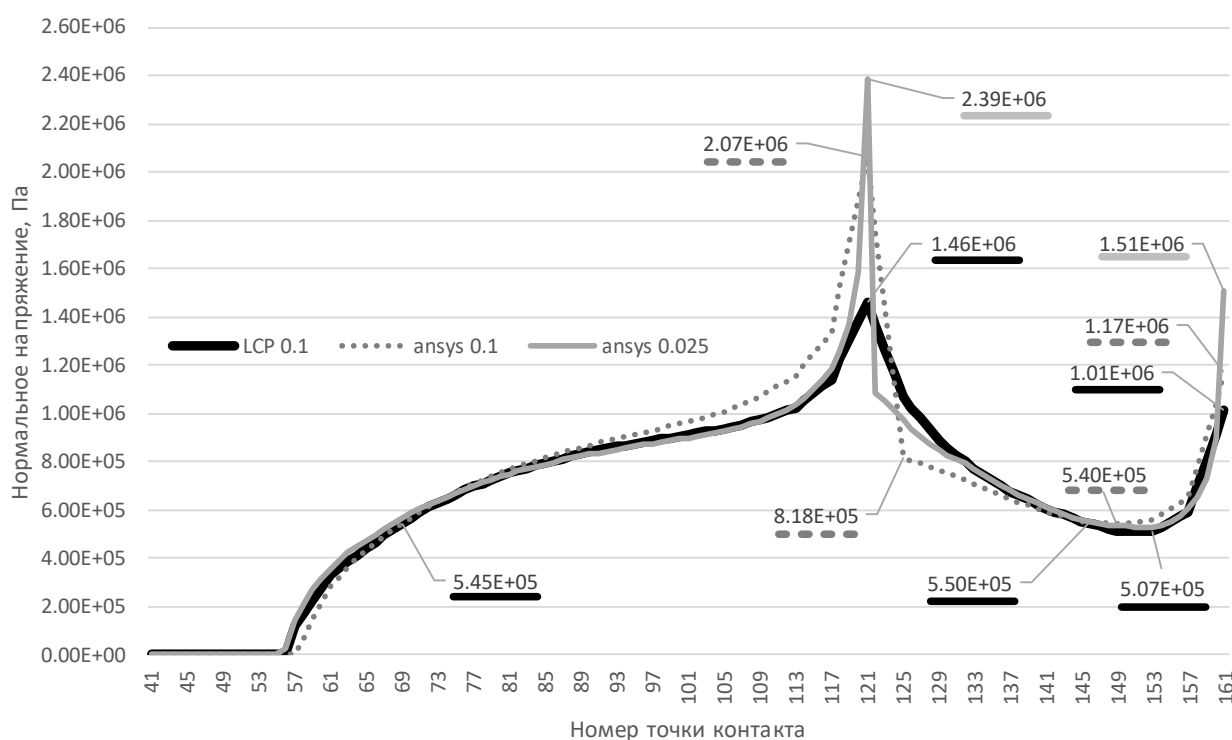


Рисунок 43 – Нормальные напряжения в зоне контакта LCP(mesh=0.1) и ANSYS(mesh=0.1, 0.025)

При сгущении сетки КЭ с mesh=0.1 до mesh=0.025 в ContactLCP решение изменяется несущественно, за исключением мест концентрации напряжений (точки 121 и 161) и, поэтому, решение LCP 0.025 на рисунке не показано.

В таблице ниже показана разница Δ (%) по нормальным контактным напряжениям в характерных точках для «LCP 0.1» и «ansys 0.025» (рис. 43):

№	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161
Δ , %	20.009	6.9671	7.987	3.3102	1.4003	0.1323	0.4739	0.8672	1.1173	1.2573	1.3067	1.2351	0.9968	0.4581	1.0733	4.2202	63.082	10.242	4.283	0.4355	0.1223	0.643	1.5427	3.9651	4.3559	1.8702	48.681

Естественно, что напряжения в концентраторах напряжений будут расти при сгущении сетки КЭ, что объясняет существенную разницу по напряжениям в точках 121 и 161.

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что при сгущении сетки КЭ величины нормальных контактных напряжений, получаемые в ANSYS, стремятся к величинам контактных напряжений, полученным в ContactLCP на грубой сетке КЭ. Подобная ситуация наблюдалась при решении этой и многих других задач.

На рисунке 44 показаны касательные напряжения в зоне контакта, полученные в ContactLCP, ANSYS (значения по умолчанию) и в «ANSYS настроенный» (с настройкой описанных ниже параметров) для одинаковой сетки КЭ (mesh=0.025).

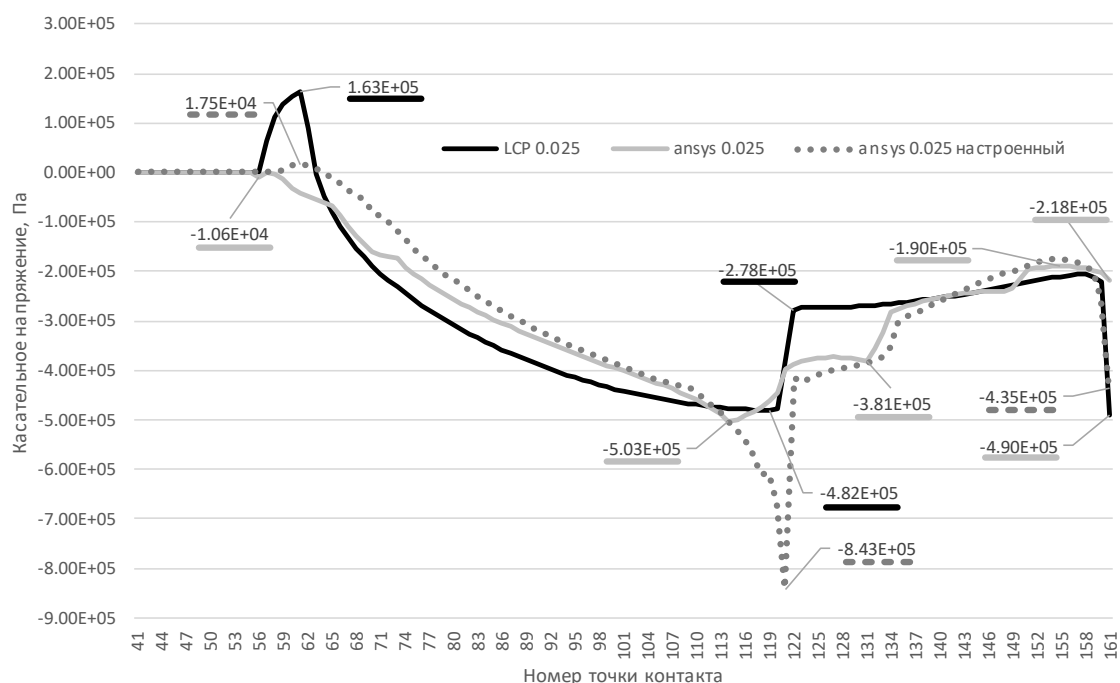


Рисунок 44 – Касательные напряжения в зоне контакта ANSYS и ContactLCP. Mesh=0.025

Сравним результаты, полученные «LCP 0.025» и «ansys 0.025» без дополнительной настройки. Следует обратить внимание на отличие по касательным напряжениям, которое наблюдается в точках с 57 по 62, где нормальные контактные напряжения малы и происходит проскальзывание влево верхнего тела относительно нижнего.

Существенное различие по касательным напряжениям показывает, что программно-контролируемых настроек алгоритма ПК ANSYS (настроек по умолчанию) недостаточно для получения более точного решения. Соответственно

в ПК ANSYS необходимо вручную настраивать параметры контакта, влияющие на точность. Список настроенных параметров:

- Метод обнаружения контактных пар: узел в узел (Nodal-Nodal from contact).
- Формулировка задачи: Метод множителей Лагранжа (Normal Lagrange).
- Допустимая величина упругого скольжения: $1e-5$ м. (Elastic slip tolerance).

При указании значения меньше данного, процесс решения не сходится.

- Малые перемещения при скольжении: включены. (Small sliding).
- Слабые пружины: отключены. (Weak Springs). При возможности перемещения тела как жёсткого целого ANSYS может установить пружины малой жёсткости для повышения устойчивости решения, которые влияют на получаемые результаты.

- Способ решения: прямой. (Solver type: Direct). Есть выбор итерационного способа, но руководство пользователя ANSYS советует с формулировкой метода множителей Лагранжа использовать прямой метод.

Настройка параметров осуществляется с целью более строгого выполнения условий контакта, поскольку в алгоритмы ANSYS заранее заложена погрешность выполнения этих условий.

Из рисунка 44 видно, что ANSYS при настройке параметров смог уловить область скольжения узлов 57-62 верхнего тела влево. Также стали выражены концентраторы напряжений в точках 121 и 161. Последующее сгущение сетки КЭ в ПК ANSYS приводит к осцилляции решения по касательным напряжениям. При использовании коэффициентов трения больше 0.2 ANSYS предупреждает, что это может повлиять на качество численного решения (возможна осцилляция решения) и ухудшить его сходимость.

Исследуем далее влияние коэффициента трения на результаты расчёта по касательным контактным напряжениям. Добавим шарнирно подвижные опоры для верхнего тела справа, остальные параметры (жёсткость, размеры, нагрузки) не изменяются (рис. 45). Опоры справа добавляются для отслеживания распределения

касательных напряжений, когда по всей зоне контакта реализуется проскальзывание верхнего тела по нижнему.

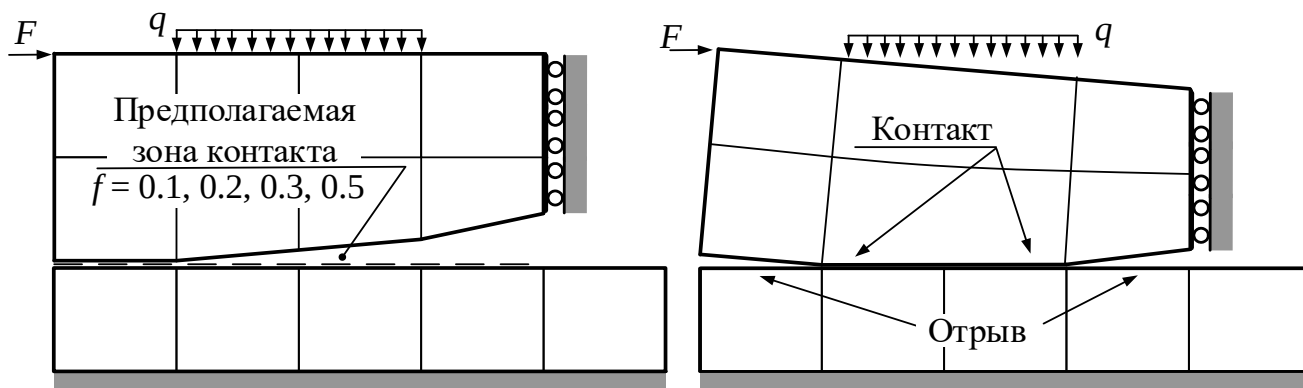


Рисунок 45 – Расчётная и деформированная схема. Добавление опор для верхнего тела.

На рисунке 46 показаны касательные напряжения в зоне контакта при коэффициенте трения $f = 0.1$. В этом случае скольжение наблюдается по всей зоне контакта. Результаты, полученные на «грубой» сетке КЭ ContactLCP, практически совпадают с результатами на «густой» сетке ANSYS.

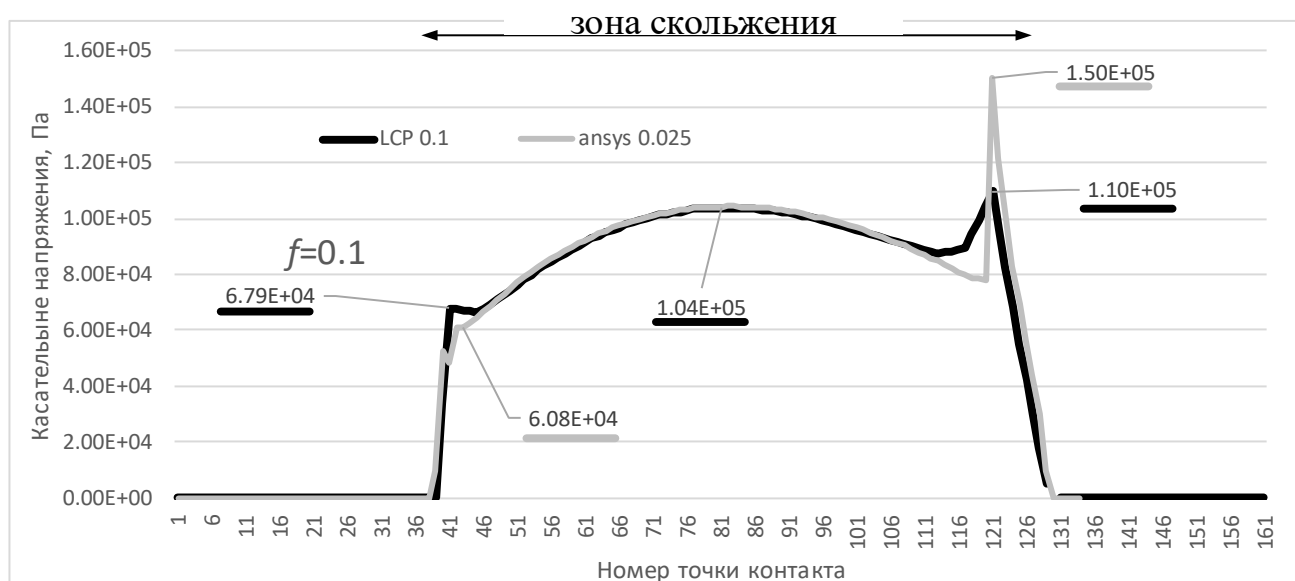


Рисунок 46 – Касательные напряжения при $f=0.1$. LCP(mesh=0.1) и ANSYS(mesh=0.025)

На рисунке 47 показаны касательные напряжения в зоне контакта при коэффициенте трения $f = 0.15$, полученные в ContactLCP, ANSYS и «ANSYS настроенный». В этом случае скольжение так же реализуется во всех контактных парах. По результатам решения ANSYS видно, что при выборе параметров контактного взаимодействия по умолчанию («ansys 0.025») напряжения в точках

104-121 уменьшаются, это происходит по причине появления зоны сцепления. При уточнении настроек («ansys 0.025 настроенный») зона сцепления исчезает и решение ANSYS сближается с решением ContactLCP («LCP 0.1») на более грубой сетке КЭ.

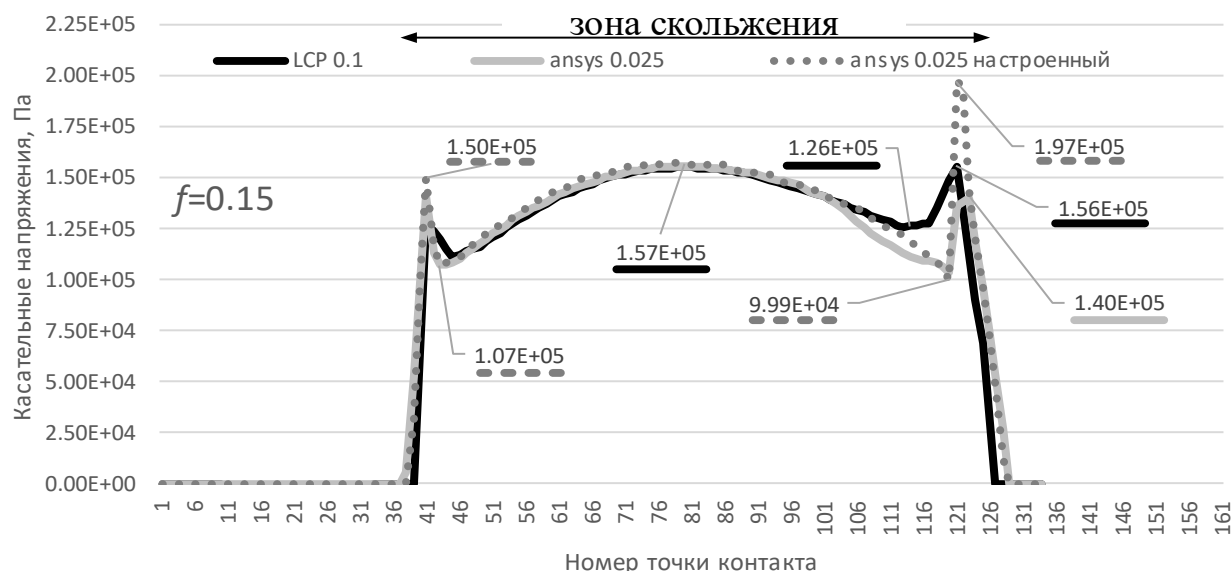


Рисунок 47 – Касательные напряжения при $f=0.15$. LCP(mesh=0.1), ANSYS(mesh=0.025) и ANSYS настроенный (mesh=0.025)

При увеличении коэффициента трения до $f = 0.3$ результат решения ANSYS по касательным напряжениям начинает осциллировать в зоне сцепления. На рисунке 48 показаны касательные напряжения в зоне контакта, полученные в ContactLCP (mesh=0.1) и в ANSYS (mesh=0.0125). В этом случае появляется зона сцепления в точках контакта 78-127.

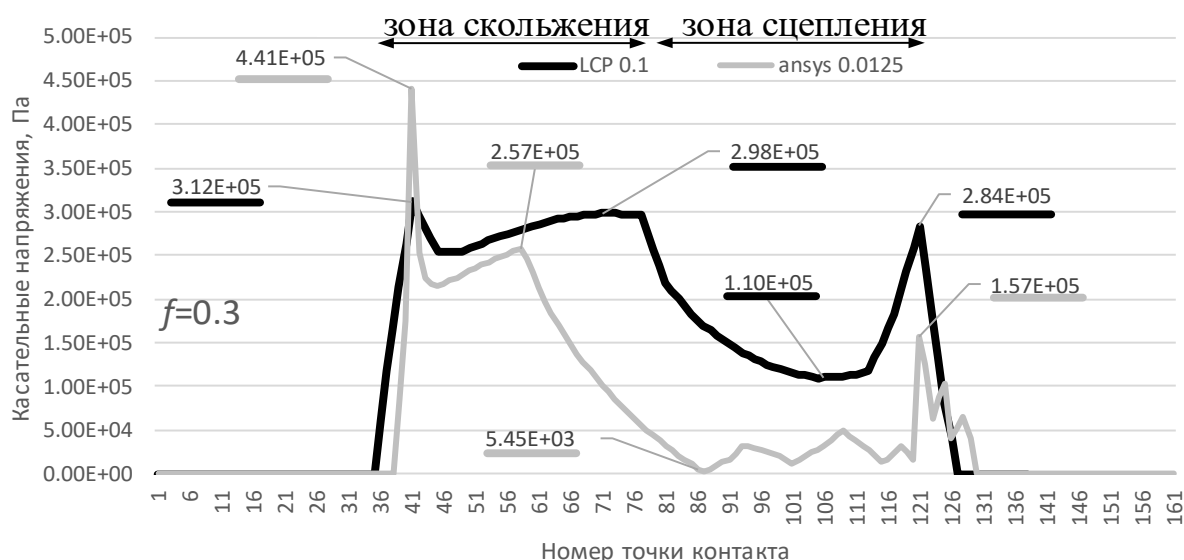


Рисунок 48 – Касательные напряжения при $f=0.3$. LCP(mesh=0.1), ANSYS(mesh=0.0125)

Из анализа результатов, представленных на рисунках 46-48 видно, что поведение решения сильно зависит от заданного коэффициента трения. При коэффициенте трения $f > 0.15$ полученное решение ANSYS по касательным контактным напряжениям начинает «осциллировать» в зоне сцепления (точки 78-127). В ANSYS при увеличении коэффициента трения с $f = 0.3$ до $f = 0.5$ получаемый результат качественно не изменяется (продолжает осциллировать). Время расчёта существенно возрастает в зависимости от коэффициента трения от 5 минут при $f = 0.1$ до 30 минут при $f = 0.5$.

Решение в ПК ANSYS и подобных может быть не получено из-за появления проблем со сходимостью. Это возможно: 1) если в процессе решения подобранная жёсткость контактных элементов начинает существенно влиять на получаемый результат; 2) если большая часть области контакта близка к отрыву.

Рассмотренный пример демонстрирует ограничения и сложности, возникающие при расчёте контактных задач в ПК ANSYS, которые отсутствуют в новых разработанных методах решения контактных задач. Для решения данной задачи в ContactLCP из параметров контактного взаимодействия потребовалось задать только коэффициент трения и шаговый алгоритм решения не требует регулировки параметров остановки процесса решения.

Далее рассматриваются практические задачи, в которых учёт контакта с трением может существенно повлиять на напряжённо-деформированное состояние конструкций. Часть из подобных задач рассмотрена в работах [158–160].

4.4. Расчёт водопропускной трубы в насыпи автомобильной дороги

Данный пример демонстрирует возможности разработанной методики решения контактных задач с трением, где учитывается только конструктивная нелинейность задачи. Основные научные результаты опубликованы в работах [91,160,161].

Объектом исследования является большепролетная водопропускная труба под насыпью. В силу большой протяжённости трубы рассматривается задача плоской деформации. Очертанием арочной трубы в грунте является дуга окружности (рис. 49). Труба жёстко опирается на висячие сваи трения. Нагрузкой является собственный вес грунта. Труба и сваи взаимодействуют только с грунтом по модели одностороннего взаимодействия с трением. Таким образом, система труба-основание «висит» в грунте, что сильно осложняет решение задачи, поскольку у трубы и свай отсутствуют опоры. Подобные задачи с прямым подходом (без добавления опор для конструкции в грунте) сложно рассчитать в известных программных комплексах (ANSYS, Lira, Abaqus).

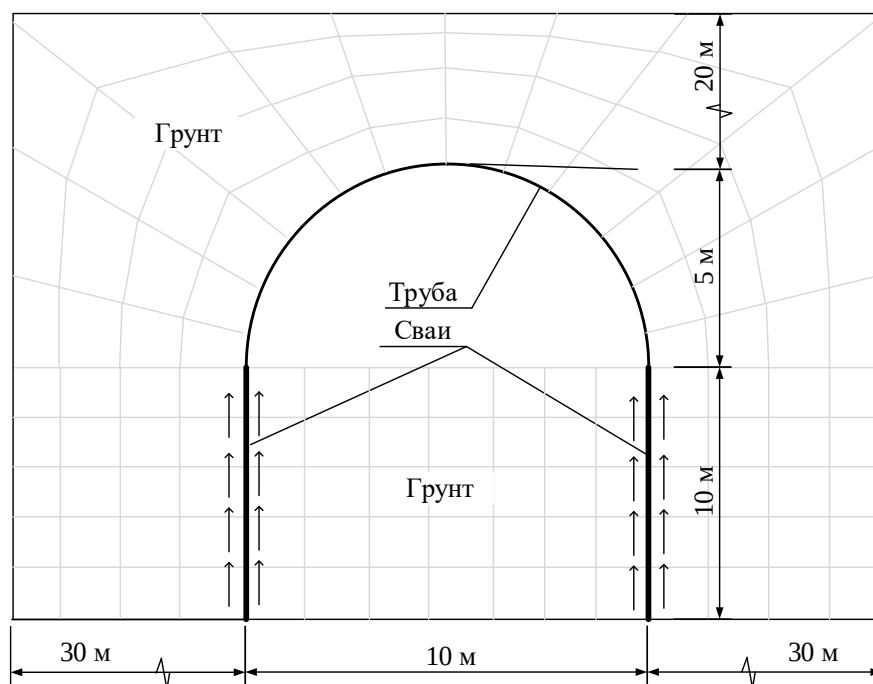


Рисунок 49. – Схема системы труба-основание-насыпь

Чаще всего в программных комплексах используется вариационные постановки задачи, которые требуют закрепления степеней свободы обоих контактирующих тел, следовательно, для решения поставленной задачи необходим подход с использованием контактных конечных элементов или нуль-элементов.

Основные параметры задачи: модуль упругости грунта $E_s = 4.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона грунта $\mu = 0.27$, ширина вырезанной полосы $t = 1 \text{ м}$, удельный вес грунта $\gamma = 2.26611 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, модуль упругости трубы $E_a = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, момент инерции арки $I_{xa} = 2.110901 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$, площадь поперечного сечения арки $A_a = 2.366322 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, коэффициент трения скольжения по грунту $f = 0.4$. Характеристики свай (усреднённые): $E_p = 2e10 \text{ Па}$, $A_p = 0.25 \text{ м}$, $I_p = 5.208333e-3 \text{ м}^4$. В качестве опор добавлены вертикальные ограничения в основании грунта и горизонтальные по бокам с учётом симметрии задачи. Размер насыпи в стороны от трубы определён серией линейных расчётов. Размер увеличивался до тех пор, пока сходимость по максимальным перемещениям не достигла 1%. На рис. 50 представлена сетка КЭ (скриншот схемы из программы).

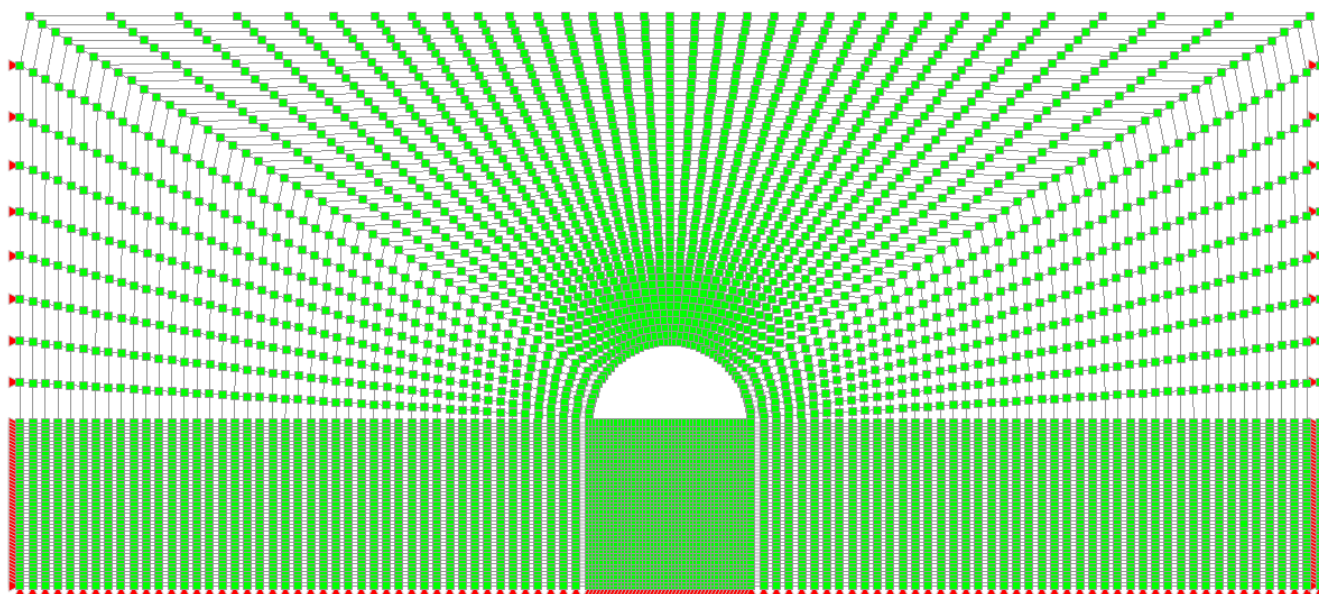


Рисунок 50. – КЭ сетка задачи

В качестве результатов решения ЛЗД получаем усилия взаимодействия и взаимные перемещения по нормали X_n, Z_n (рис 51, а) и по касательной X_τ, Z_τ к зоне контакта (рис. 51, б). Из этого можно сделать выводы о наличии зон сцепления, отрыва и проскальзывания грунта с объектом. Из условий симметрии задачи показана только правая половина.

Для проверки точности полученных результатов используется следующий алгоритм.

1. Для расчёта рассматривается основная система МП с нуль-элементами (все контактные пары по нормали и по касательной соединены нуль-элементами).
2. Производится линейный расчёт на внешнее силовое и кинематическое воздействие. Кинематическим воздействием являются взаимные перемещения узлов Z_n, Z_τ как результат решения ЛЗД. Взаимные перемещения на необходимую величину обеспечиваются с помощью нуль-элементов в системе.
3. Результатами расчёта линейной задачи с обеспеченными взаимными перемещениями являются глобальные перемещения узлов по степеням свободы (вектор глобальных узловых перемещений).

4. Из полученных глобальных перемещений рассчитываются деформации, а из них – внутренние усилия в нуль-элементах соединяющие контактные пары.
5. Из расчёта ЛЗД методом Лемке известны контактные пары, находящиеся в контакте $x_{ni} > 0$ (зона контакта). В зоне контакта усилия в нуль-элементах из рассчитанной для проверки линейной задачи должны быть равны усилиям взаимодействия, полученным в результате решения ЛЗД.

Полученные усилия взаимодействия из линейной задачи отличаются не более чем на $10^{-10} H$ от усилий x_n, x_t , полученных при решении предложенным алгоритмом. Для данной задачи наименьшее усилие взаимодействия оказалось касательным в контактной паре в верхней части водопропускной трубы $0.000012 H$. Таким образом, погрешность полученных результатов для усилий взаимодействия и взаимных перемещений контактных пар составляет:

$$\frac{0.000012 - (0.000012 - 10^{-10})}{0.000012} \cdot 100 = 8.333 \cdot 10^{-4} \%$$

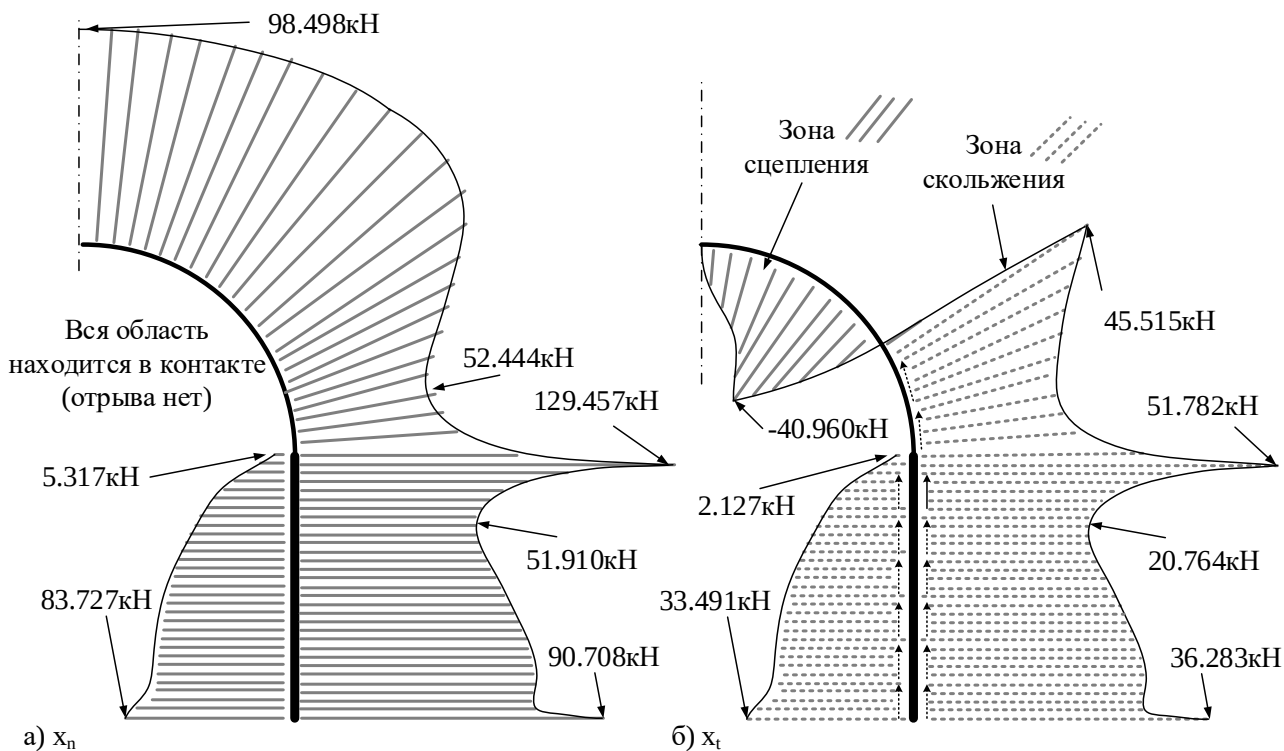


Рисунок 51 – Усилия взаимодействия

На рис. 52 и рис. 53 показаны деформированные схемы трубы в линейной и нелинейной постановках (масштаб деформаций М3:1). Для рис. 53 выделены зоны сцепления и скольжения грунта для половины задачи в силу симметрии.

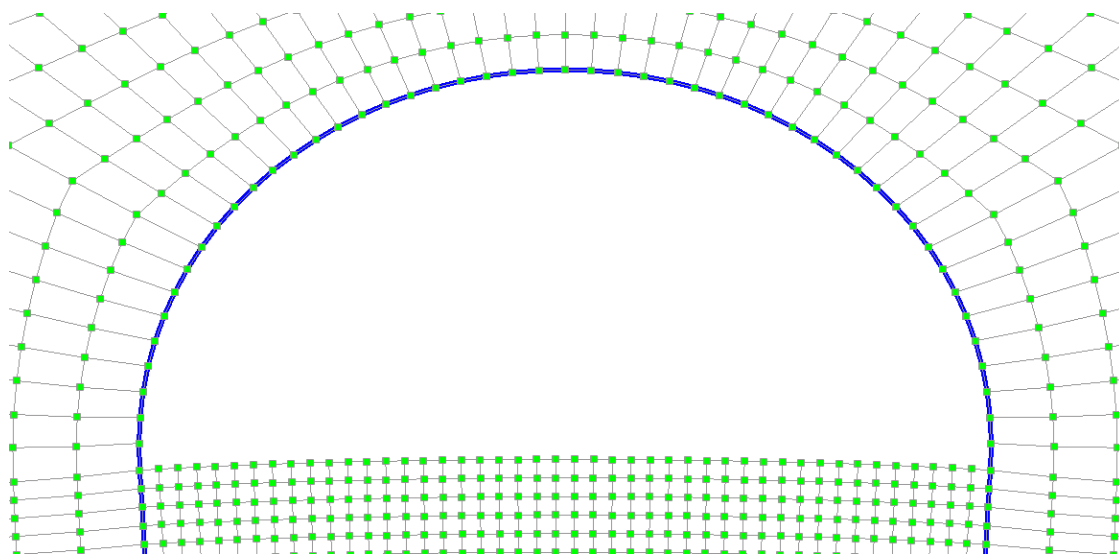


Рисунок 52 – Деформированная схема трубы. Линейная задача, двухсторонний контакт

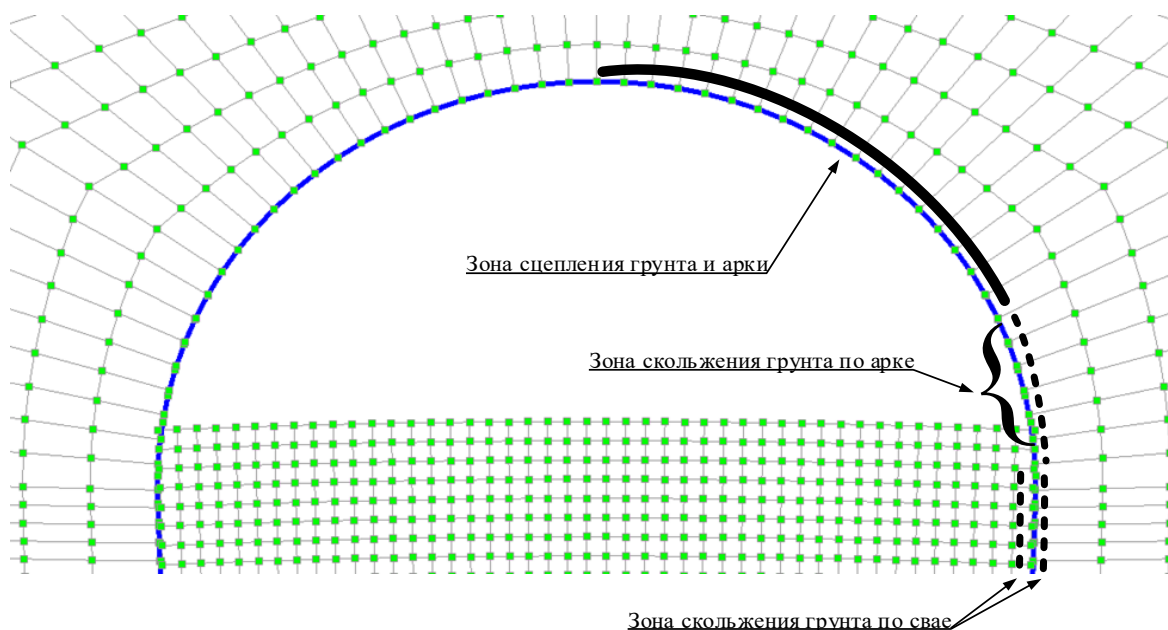


Рисунок 53 – Деформированная схема трубы. Нелинейная задача, односторонний контакт

Несмотря существенные отличия в поведении линейной и нелинейной моделей, в которых отличаются взаимные перемещения и усилия взаимодействия по оси трубы в насыпи, можно сказать, что для быстрого ориентировочного проектировочного расчёта сечения трубы можно не учитывать одностороннее взаимодействие грунта с трубой и её основанием. Происходит уменьшение усилий

в арке в силу перераспределения нагрузок (грунт в нелинейной постановке не так сильно деформирует арку). Для уникальных случаев большепролётных труб обязательно учитывать одностороннее взаимодействие трубы с насыпью и деформативные свойства основания.

4.5. Расчёт подпорной стенки.

Расчет железобетонной подпорной стенки, взаимодействующей со скальным основанием [159].

Все размеры на расчетной схеме (рис. 54) указаны в метрах, величины поверхностных нагрузок – в МПа. Учитывались: q_x и q_y – горизонтальное и вертикальное давление засыпки на боковые поверхности стенки; $q_{гр}$ – вертикальная пригрузка весом грунта засыпки; q_n и q_t – нагрузка по верхнему торцу фрагмента, передаваемая отсеченной частью конструкции; собственный вес фрагмента.

Модули упругости бетона и скального основания равны соответственно $E_b = 26500$ МПа, $E_o = 20000$ МПа; коэффициенты Пуассона – $\nu_b = 0,15$, $\nu_o = 0,2$; объемный вес бетона – 24 кН/м³, коэффициент трения $f = 1,0$; напряженное состояние принималось плоским деформированным. Объемный вес скального основания в число нагрузок не входил.

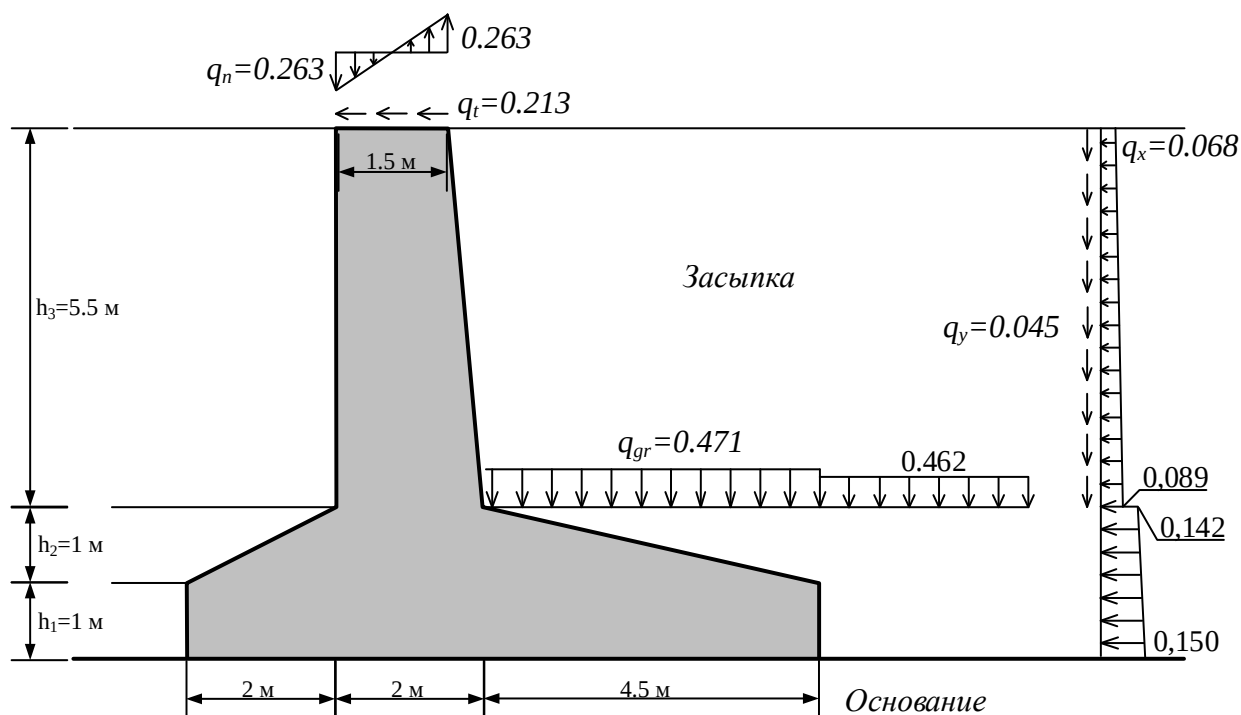


Рисунок 54 - Расчётная схема подпорной стенки

На рис. 55 приведена деформированная схема подпорной стенки. Перемещения увеличены в 1000 раз.

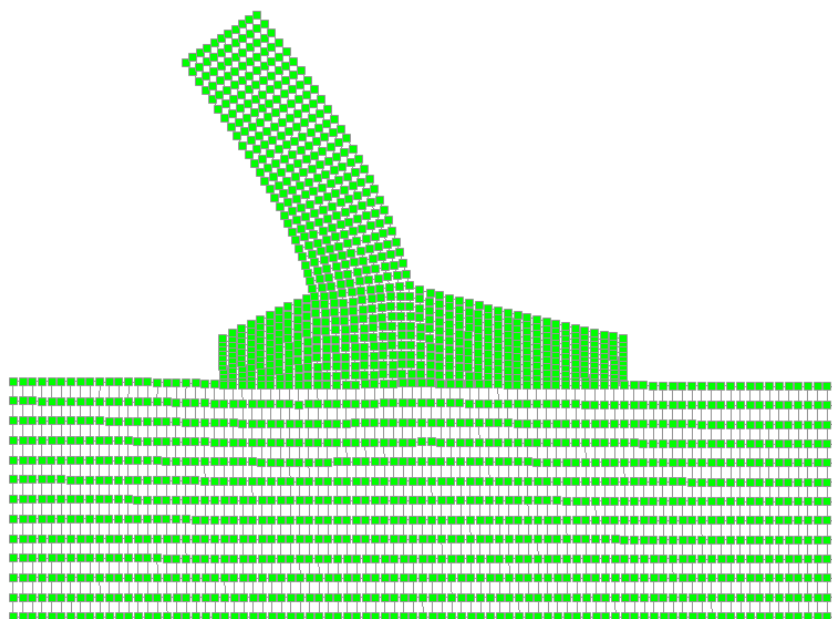


Рисунок 55 – Деформированная схема подпорной стенки

Результатами решения ЛЗД для контактной задачи являются вектор усилий взаимодействия x_n , x_t и взаимных перемещений z_n , z (рис. 56).

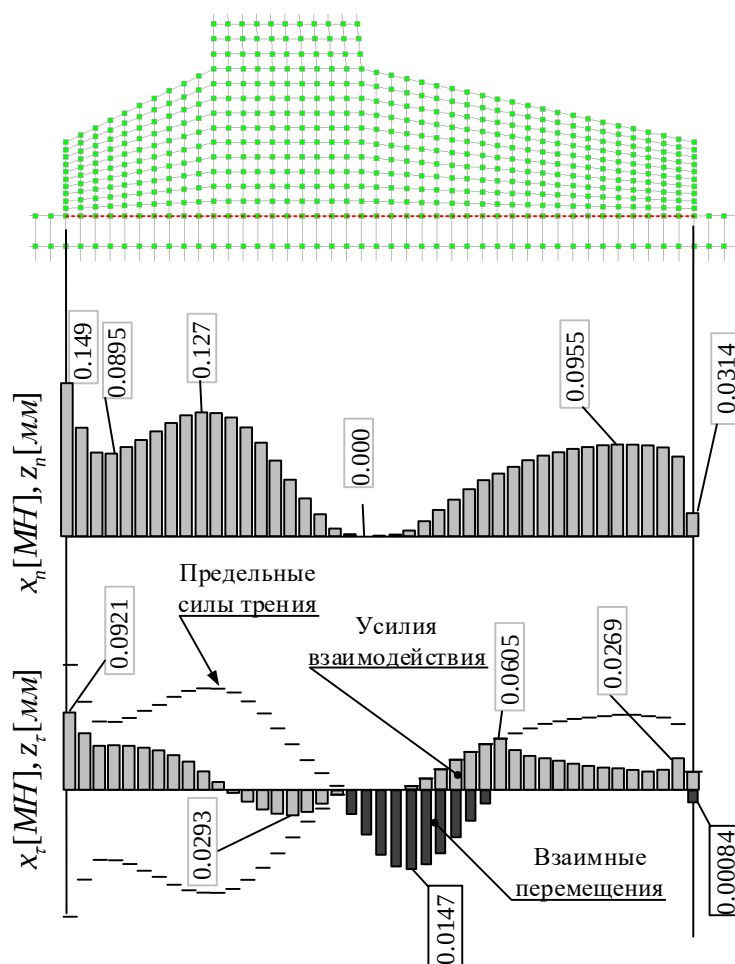


Рисунок 56 – Взаимные перемещения и усилия взаимодействия по нормали z_n, x_n и по касательной z_t, x_t к зоне контакта.

Результаты решения сравниваются с результатами, полученными Лукашевичем А.А. на рис. 57. Приведены перемещения по горизонтали u , горизонтальные σ_x и вертикальные σ_y напряжения.

Напряжения в зоне контакта определялись как усилие взаимодействия делёное на размер элемента (площадь, приходящуюся на один узел).

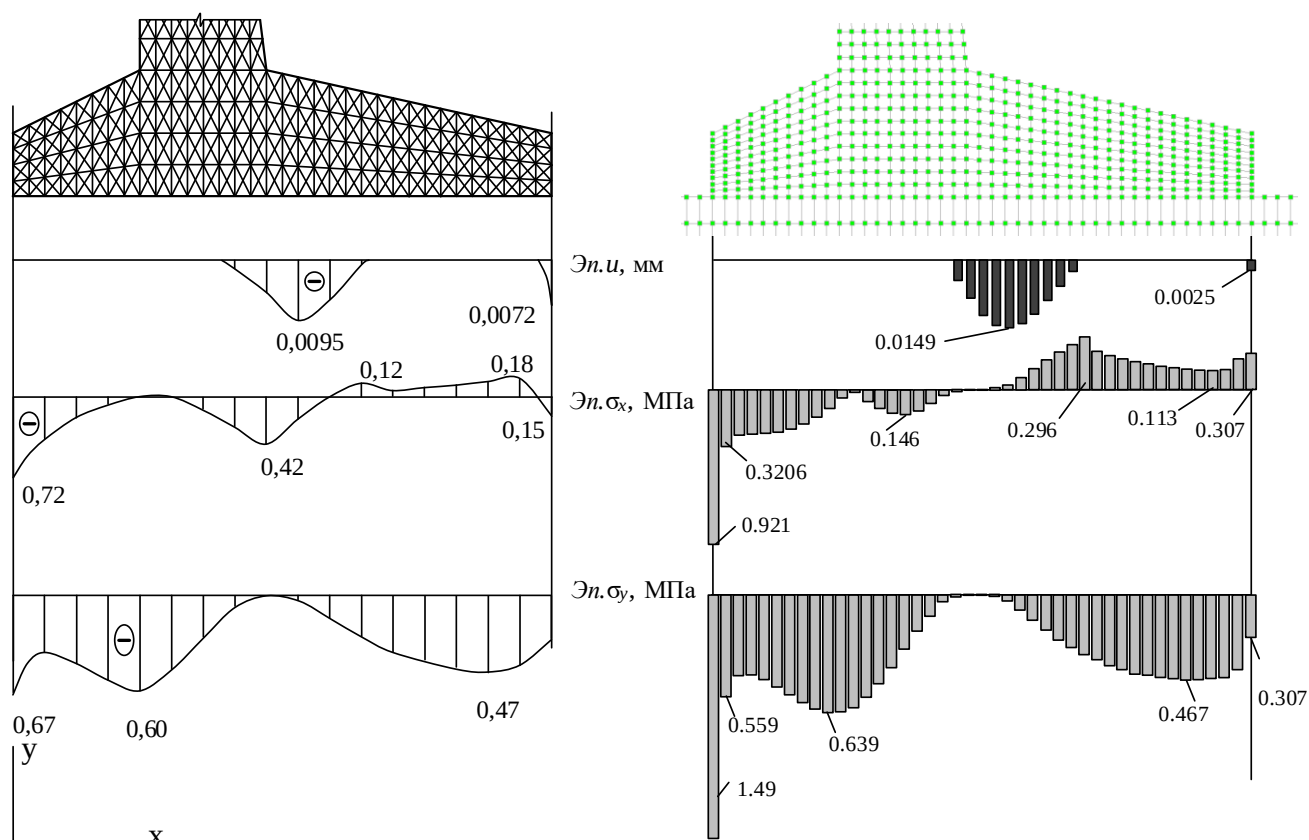


Рисунок 57 – Сравнение решений Лукашевича А.А. (слева) и Попова А.Н. (права) по НДС в зоне контакта.

Основная разница в результатах решения касается учёта истории нагружения:

“... учет трения в односторонних связях значительно усложняет задачу и делает ее решение зависящим от характера и истории нагружения, поэтому является целесообразным моделировать процесс нагружения и, соответственно, строить решение на основе метода пошагового нагружения” (дисс., 2011 Лукашевич А.А.). Данная задача также была решена Вовкушевским [8], и результаты практически совпали с расчётами Лукашевича А.А.

Таким образом, алгоритм решения контактной задачи, поставленной в виде ЛЗД показывает достоверные результаты при расчёте задач, где в ходе нагружения конструкции не происходит попеременных событий скольжения и сцепления контактных пар.

Выводы по четвёртой главе.

1. Верификация разработанного метода решения контактных задач на аналитических и модельных задачах, включая идеальный контакт и контакт с известными предельными силами трения, подтвердила высокую точность получаемых решений. Продемонстрирована корректность работы предлагаемых алгоритмов при тривиальном, нормальном и лучевом решениях.

2. Продемонстрирована устойчивость разработанных алгоритмов к ошибкам округления, особенно в сложных задачах контакта с трением (когда силы трения по всей зоне контакта близки к предельным). Это обеспечивает получение физически достоверных результатов даже при численно сложных сценариях.

3. Сравнительный анализ полученных решений с решениями ПК ANSYS показал, что для задач, включающих:

- возможность перемещения тел как жёсткого целого,
- зоны сцепления при силах трения близких к предельным,
- наличие концентраторов напряжений в зоне контакта,

разработанный метод:

- обеспечивает получение не осциллирующего и устойчивого решения;
- не требует трудоёмкой итерационной настройки множества параметров контакта, в отличие от ANSYS, где достижение сходимости и точности требует значительных временных затрат на подбор и настройку параметров контакта;
- позволяет точно смоделировать трение Кулона без введения искусственных «слабых пружин» или допущения взаимопроникновения, часто присущих методам, реализованным в программных комплексах.

4. Эффективность и применимость разработанных подходов, включая способность моделировать сложные контактные взаимодействия, продемонстрирована на практических задачах водопропускной трубы и подпорной стенки. Сравнение с результатами других авторов для задачи расчёта подпорной

стенки показало сопоставимость НДС при выявлении влияния истории нагружения на касательные напряжения в зоне контакта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ литературы показал, что задачи одностороннего контакта с трением деформируемых тел трудно поддаются численному решению, а математические результаты сходимости численных алгоритмов редки и большинство из них требуют довольно сильных допущений. Это приводит к необходимости настройки множества параметров, влияющих на результат решения задачи, что предъявляет высокие требования к квалификации пользователя. Также выявлено отсутствие постановок задач одностороннего контакта с трением между деформируемыми телами в виде ЛЗД. Показано, что постановка в виде ЛЗД позволяет использовать эффективные шаговые методы решения контактных задач.

Получена новая постановка контактной задачи с трением в виде ЛЗД с использованием метода перемещений строительной механики, где нормальные и касательные усилия взаимодействия и взаимные перемещения в зоне контакта связываются через контактную матрицу жёсткости. Это приводит к необходимости задавать только один параметр контакта – коэффициент трения, и позволяет использовать шаговый алгоритм решения.

Разработаны новые методы расчёта контактной задачи с трением, основанные на модификации метода Лемке и реализованные в виде: алгоритма с искусственно введённым обжатию и алгоритма с нарастающим параметром внешнего воздействия.

Новые методы расчёта реализованы в программе ContactLCP. Показана и описана работа новых алгоритмов решения ЛЗД. Выявлены и приведены особенности расчета и ограничения использования нового метода решения контактных задач с трением. Проведена верификация разработанного метода сравнением полученных численных результатов с аналитическими результатами и результатами программного комплекса ANSYS. Показаны преимущества нового метода расчёта контактных задач с трением по сравнению с наиболее распространёнными численными итерационными методами решения этих задач.

Диссертационное исследование содержит разработанные алгоритмы и их программные реализации, внедрение которых позволяет проводить исследования и проектировать системы, где необходим учёт одностороннего контакта деформируемых тел с трением.

В качестве перспектив дальнейших исследований рассматривается программная оптимизация работы новых алгоритмов решения линейной задачи дополненности. Предполагается также развитие методов решения задач, где необходим учёт комбинации конструктивной нелинейности с другими видами нелинейности, к расчёту таких объектов как: водопропускная труба в грунте, кинематические сейсмоизолирующие опоры, подпорная стенка в грунте и т. п. Предполагается рассмотреть задачу устойчивости склона откоса как контактную задачу с трением и разработать метод её решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. Москва: Наука, 1980.
2. Гловински Р.Г., Лионс Ж., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. Москва: Мир, 1981.
3. Главачек И. et al. Решение вариационных неравенств в механике. Москва: Мир, 1986. 272 р.
4. Попп К. О негладких системах в механике // Прикладная математика и механика. 2000. Vol. 64, № 5. Р. 795–804.
5. Пфайффер Ф., Глоккер К. Контакты в системах твердых тел // Прикладная математика и механика. 2000. Vol. 64, № 5. Р. 805–816.
6. Ворович И.И., Александров В.М. Механика контактных взаимодействий. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
7. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. Москва: МГАПИ, 1997. 340 р.
8. Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. Москва: Энергия, 1981. 136 р.
9. Розин Л.А., Смирнов М.С. Решение контактной задачи теории упругости с податливостью в односторонних связях // Известия вузов. Строительство. 2000. № 5.
10. Ловцов А.Д., Ким Т.С. Многослойные конструкции как системы с переменными связями // Современные проблемы машиностроительного комплекса: Сборник научных трудов. 1998. Р. 35–38.
11. Ловцов А.Д. Алгоритмы расчета конструкций с переменными связями // Восьмой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. 2001. Р. 401–402.

12. Терещенко В.Я. О выпуклых функционалах в вариационных задачах теории упругости, аналогичных обобщенным функционалам Трэффца // ПММ. 1980. Vol. 44, № 1. P. 185–188.
13. Перельмутер А.В. Использование методов квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями // Исследования по теории сооружений. 1972. № 19. P. 138–147.
14. Перельмутер А.В. К расчету систем с односторонними дискретными связями // Строительная механика и расчет сооружений. 1976. № 1. P. 59–61.
15. Oden J.T., Pires E.B. Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws // Comput Struct. 1983. Vol. 16, № 1. P. 481–485.
16. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988. 509 p.
17. Oden J.T., Pires E.B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity // Appl. Mech. 1983. № 50. P. 67–76.
18. Bjorkman G. et al. Sequential quadratic programming for non-linear elastic contact problems // Int. J. for Num. Meth. Eng. 1995. Vol. 38, № 1. P. 137–165.
19. Klarbring A. On discrete and discretized non-linear elastic structures in unilateral contact (stability, uniqueness and variational principles) // Int J Solids Struct. 1988. Vol. 24, № 5. P. 459–479.
20. Panagiotopoulos P.D. Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions. Birkhäuser: Boston-Base-Stuttgart, 1985. 412 p.

21. Panagiotopoulos P.D., Lazaridis P.P. Boundary minimum principles for the unilateral contact problems // Int. J. Solids Structures. 1987. Vol. 23, № 11. P. 1465–1484.
22. Park J.K., Kwak B.M. Three-dimensional frictional contact analysis using the homotopy method // J. Appl. Mech. 1994. № 61. P. 703–709.
23. Kwak B.M., Lee S.S. A complementarity problem formulation for two-dimensional frictional contact problems // Comput Struct. 1988. Vol. 28, № 4. P. 469–480.
24. Mangasarian O.L. Characterization of linear complementarity problems as linear programs // Math. Programming Study. 1978. P. 74–87.
25. Fancello E.A., Feijoo R.A. Shape optimization in frictionless contact problems // Int. J. for Num. Meth. Eng. 1994. Vol. 37, № 13. P. 2311–2335.
26. Nguyen D.H., Gery de S. Frictionless contact of elastic bodies by finite element method and mathematical programming technique // Comput Struct. 1980. № 11. P. 55–67.
27. Auricchio F., Sacco E. Augmented Lagrangian finite elements for plate contact problems // Int. J. for Num. Meth. Eng. 1996. № 39. P. 4141–4158.
28. Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов. РАН: МТТ, 2002.
29. Вовкушевский А.В. О вариационных постановках задачи Синьорини с трением // Изв. Академии Наук СССР. Механика твердого тела. 1984. № 6. P. 73–78.
30. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. Москва: Строиздат, 1975. 144 р.
31. Рабинович И.М. К задаче расчета статически неопределимых систем с односторонними связями (доказательство единственности решения) // Исследования по теории сооружений - Госстройиздат. 1961. № 10.

32. Francavilla A., Zienkiewicz O.C. A note on numerical computation of elastic contact problems // *Int J Numer Methods Eng.* John Wiley & Sons, Ltd, 1975. Vol. 9, № 4. P. 913–924.
33. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: ВПП «Компас», 2001. 448 р.
34. Перельмутер А.В. О сходимости уточненной рабочей системы // *Строит. механика и расчет сооружений.* 1978. № 5. P. 76–77.
35. Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction // *Comput Methods Appl Mech Eng.* 1986. Vol. 58. P. 175–200.
36. Травуш В.И. Прямоугольная неизолированная плита на линейно-деформируемом основании // *Строительная механика и расчет сооружений.* 1975. № 3. P. 31–35.
37. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // *ПММ.* 1978. Vol. 42, № 3. P. 466–474.
38. Bathe K.J., Chaudhary A.A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems // *Int J Numer Methods Eng.* 1985. Vol. 21. P. 65–88.
39. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с англ. Москва: Мир, 1986. 320 р.
40. Вовкушевский А.В. Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхностей // *Изв. Академии Наук СССР: Механика твердого тела.* 1991. № 3. P. 151–160.
41. Белостоцкий А.М. Численное моделирование статического и динамического НДС пространственных систем «сооружение-основание-водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия-закрытия швов и макротрещин // *Математическое моделирование в механике*

сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Труды XVIII Международной конференции. – СПб.:НИИХ СПбГУ. 2000. Vol. 2. P. 65–69.

42. Kravchuk A.S. The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, № 3. P. 351–357.
43. Landenberger A., El-Zafrany A. Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements // Comput Struct. 1999. Vol. 71, № 6. P. 651–661.
44. Raous M. Art of Modeling in Contact Mechanics // The Art of Modeling Mechanical Systems. Springer, 2016. Vol. 570. P. 203–276.
45. Аверин А.Н., Пузаков А.Ю. Расчёт систем с односторонними связями // Строительная механика и конструкции. 2015. Vol. 1, № 10. P. 15–32.
46. Acary V., Brémond M., Huber O. On solving contact problems with coulomb friction: Formulations and numerical comparisons // Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics. Springer International Publishing, 2018. P. 375–457.
47. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. Санкт-Петербург: Политехника, 2016. 234 р.
48. Lukashevich A.A. Modelling of contact interaction of structures with the base under dynamic loading // Magazine of Civil Engineering. St-Petersburg State Polytechnical University, 2019. Vol. 89, № 5. P. 167–178.
49. Lukashevich A.A. Computational modelling of stiffness and strength properties of the contact seam // Magazine of Civil Engineering. 2018. Vol. 81, № 5. P. 149–159.
50. Lukashevich A.A., Rozin L.A. On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis // Magazine of Civil Engineering. 2013. Vol. 1, № 36. P. 75–81.

51. Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. 2013. Vol. 36, № 1. P. 75–81.
52. Migórski S. Optimal Control of History-Dependent Evolution Inclusions with Applications to Frictional Contact // J Optim Theory Appl. 2020. Vol. 185. P. 574–596.
53. Ignatyev A. V., Ignatyev V.A., Onischenko E. V. Analysis of Systems with Unilateral Constraints through the Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 1754–1759.
54. Дербенцев И.С., Потапов А.Н., Созыкина Е.С. Анализ конструктивно-нелинейных колебаний железобетонного каркаса // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Строительство и архитектура». FSAEIHE South Ural State University (National Research University), 2023. Vol. 23, № 4. P. 5–18.
55. Potapov A.N., Tazeev N.T. Vibrations of a Constructively Nonlinear System with One-Way Connections // Lecture Notes in Civil Engineering. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2022. Vol. 168. P. 25–33.
56. Potapov A.N., Tazeev N.T. Time analysis of a constructively nonlinear system with one-way connections // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. ASV Publishing House, 2023. Vol. 19, № 1. P. 135–146.
57. Бочков М.И. Определение напряженно-деформированного состояния систем с односторонними связями от кинематического смещения связей с помощью метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник волгоградского государственного

- архитектурно-строительного университета. серия: строительство и архитектура. 2021. Vol. 4, № 85. P. 137–147.
58. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В., Бочков М.И. Базовый унифицированный алгоритм расчета систем с односторонними связями // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2021. Vol. 4, № 748. P. 21–29.
59. Игнатьев А.В., Бочков М.И. Расчет систем с нелинейными моментными связями методом конечных элементов в форме классического смешанного метода // Известия высших учебных заведений. Строительство. Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 2023. № 11 (779). P. 5–14.
60. Бочков М.И. Анализ эффективности решения задач статики систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Диссертация, кандидат тех. наук, 2.1.9. 2023. 136 р.
61. Bochkov M.I., Ignatyev V.A. Development of Single-Node Finite Elements for the Calculation of Systems with Unilateral Constraints by FEM in the Form of the Classical Mixed Method // Proceedings of the 7th international conference on construction, architecture and technosphere safety ICCATS 2023. 2024. P. 222–231.
62. Polyakova M.A. et al. Comparative analysis of high carbon steel behavior on contact surface with a tool in different methods of deformational nanostructuring // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2022. Vol. 118, № 1–2. P. 143–154.
63. Sevostianov I., Kachanov M. Evaluation of the incremental compliances of non-elliptical contacts by treating them as external cracks // European Journal of Mechanics, A/Solids. Elsevier Ltd, 2021. Vol. 85.

64. Tho V.D. et al. The stress–strain state of three-layer precast flexural concrete enclosure structures with the contact interlayers // *Buildings*. MDPI AG, 2021. Vol. 11, № 3. P. 1–17.
65. Breki A.D. et al. A Generalized Mathematical Model of External Sliding Friction in Solids // *Inorganic Materials: Applied Research*. Pleiades journals, 2022. Vol. 13, № 4. P. 967–971.
66. Бреки А.Д. et al. Обобщенная математическая модель внешнего трения скольжения твердых тел // *Материаловедение. Science & Technology*, 2021. № 10. P. 44–48.
67. Бреки А.Д. et al. Обобщённая математическая модель динамики изменения силы трения при покое и начале скольжения // *Чебышевский сборник*. State Lev Tolstoy Pedagogical University, 2022. Vol. 23, № 2. P. 179–190.
68. Бреки А.Д. Обобщённый закон внешнего трения скольжения твёрдых тел // *Наукоемкие технологии в машиностроении*. Bryansk State Technical University BSTU, 2023. Vol. 2023, № 2. P. 32–39.
69. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1978. 224 р.
70. Yamaguchi S., Sugawara Y., Takeda M. Motion analysis method of multibody system with contact and plastic deformation using linear complementarity problem // *SN Appl Sci*. 2021. Vol. 3, № 8.
71. Fabre M., Pozzolini C., Renard Y. Nitsche-based models for the unilateral contact of plates // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. EDP Sciences, 2021. Vol. 55. P. 941–967.
72. Morozov N.F., Tovstik P.Y. Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. Vol. 75, № 1. P. 77–84.

73. Zhang X. et al. Numerical investigation of the seismic response of a polar crane based on linear complementarity formulation // Eng Struct. 2020. Vol. 211.
74. Zhiltsov A. V. Modified duality scheme for numerical simulation of the contact between elastic bodies // Mathematical notes of NEFU. 2016. Vol. 23, № 4. P. 99–114.
75. Бокий И.Б. Численный подход к решению контактной задачи взаимодействия двух упругих тел с учетом трения и истории приложения внешнего нагружения // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова», 2006. Vol. 3, № 3. P. 3.
76. Жильцов А.В. Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта // Математические заметки СВФУ. 2016. Vol. 23, № 4. P. 99–114.
77. Осипенко М.А. Задача об одностороннем контакте гибкой нерастяжимой нити и твёрдого тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. Vol. 1, № 33. P. 82–87.
78. Осипенко М.А., Касаткин А.А. Моментная контактная нагрузка при одностороннем контакте балок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Vol. 19, № 1. P. 69–81.
79. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двухслойной балки с нежестким контактом между слоями // Прикладная математика и механика. 2011. Vol. 75, № 1. P. 77–84.

80. Розин Л.А., Ловцов А.Д. Изгиб балки-трубопровода, взаимодействующей с нелинейно-упругим основанием, при учете трения Кулона // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2005. Vol. 3, № 41. P. 132–142.
81. Розин Л.А., Ловцов А.Д. Изгиб балки-трубопровода, взаимодействующей с упругим основанием при действии трения Кулона // Изв. Вузов. Строительство. 2005. Vol. 7. P. 22–31.
82. Розин Л.А., Ловцов А.Д., Смирнов М.С. Продольная деформация многопролётной балки с трением и податливостью опор // Изв. Вузов. Строительство. 2004. Vol. 8. P. 17–22.
83. Aydinoglu A. et al. Stability Analysis of Complementarity Systems with Neural Network Controllers // HSCC 2021 - Proceedings of the 24th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control (part of CPS-IoT Week). Association for Computing Machinery, Inc, 2020.
84. Barboteu M., Ouakik Y., Sofonea M. Numerical nodelling of a dynamic contact problem with normal damped response and unilateral constraint // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2018. Vol. 56, № 2. P. 483–496.
85. Barboteu M., Cheng X., Sofonea M. Analysis of a contact problem with unilateral constraint and slip-dependent friction // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 21, № 7. P. 791–811.
86. Berezhnoi D. V., Sagdatullin M.K. Calculation of interaction of deformable designs taking into account friction in the contact zone by finite element method // Contemporary Engineering Sciences. 2015. Vol. 8, № 23. P. 1091–1098.
87. Figueiredo F.C., Borges L.A. Limit analysis and frictional contact: formulation and numerical solution // Meccanica. Springer, 2020. Vol. 55, № 6. P. 1347–1363.

88. Flores P. Modeling and Simulation of Frictional Contacts in Multi-rigid-Body Systems // Mechanisms and Machine Science. Springer Science and Business Media B.V., 2022. Vol. 110 MMS. P. 77–84.
89. Furtsev A. et al. On unilateral contact problems with friction for an elastic body with cracks // Analysis of Inverse Problems Through Partial Differential Equations (Kazumi Tanuma, Ed.). 2021.
90. Gao H.P. et al. A linear complementarity model for multibody systems with frictional unilateral and bilateral constraints // Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao. Springer, 2011. Vol. 27, № 4. P. 587–592.
91. Popov A.N., Lovtsov A.D. The calculation of a culvert in a high mound of a road as a contact problem with friction // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Institute of Physics Publishing, 2018. Vol. 456, № 1.
92. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact problem in building constructions analysis // Magazine of Civil Engineering. St. Petersburg Polytechnic University of Peter the Great, 2020. Vol. 100, № 8. P. 1–11.
93. Semenov A.S. et al. Modeling of indentation and slip of wedge punch // Magazine of Civil Engineering. 2017. Vol. 6. P. 78–101.
94. Sofonea M., Souleiman Y. Analysis of a sliding frictional contact problem with unilateral constraint // Mathematics and Mechanics of Solids. SAGE Publications Inc., 2017. Vol. 22, № 3. P. 324–342.
95. Sofonea M., Shillor M. Tykhonov Well-Posedness and Convergence Results for Contact Problems with Unilateral Constraints // Technologies . MDPI AG, 2021. Vol. 9, № 1. P. 1.
96. Streliiaiev Yu.M. A nonlinear boundary integral equations method for the solving of quasistatic elastic contact problem with Coulomb friction // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., 2016. Vol. 20, № 2. P. 306–327.

97. Tasora A., Anitescu M. A fast NCP solver for large rigid-body problems with contacts, friction, and joints // *Computational Methods in Applied Sciences*. Springer, 2009. Vol. 12. P. 45–55.
98. Колесников Г.Н. Дискретные модели механических и биомеханических систем с односторонними связями: Приложение к задачам биомеханики скелетно-мышечных систем. Петрозаводск, 2004.
99. Попов А.Н., Ловцов А.Д. Контакт с трением в линейной задаче дополненности с учётом зазоров // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2021. Vol. 297, № 4. P. 36–43.
100. Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. Elsevier Science, 1981. v–xv p.
101. Antolin P. et al. A priori error for unilateral contact problems with Lagrange multipliers and IsoGeometric Analysis // *HAL open science*. 2018.
102. Flores P., Leine R., Glocker C. Application of the nonsmooth dynamics approach to model and analysis of the contact-impact events in cam-follower systems // *Nonlinear Dyn*. Springer, 2012. Vol. 69, № 4. P. 2117–2133.
103. Leturcq B. et al. NTFA inspired model order reduction including contact and friction // *HAL open science*. 2021.
104. Жильцов А.В. Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта // *Математические заметки СВФУ*. 2016. Vol. 4, № 23. P. 99–114.
105. Фёдорова Н.В. Моделирование разрушения контактирующих тел. Новосибирск, 2019. 91 p.
106. Arghir M., Benchekroun O. A simplified structural model of bump-type foil bearings based on contact mechanics including gaps and friction // *Tribol Int*. Elsevier Ltd, 2019. Vol. 134. P. 129–144.
107. Kudawoo A.D. et al. *Computational Contact Problems: Investigations on the Robustness of Generalized Newton Method, Fixed-Point method and Partial*

- Newton Method // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. Bellwether Publishing, Ltd., 2018. Vol. 19, № 4. P. 268–282.
108. Peng L. et al. Bi-potential and co-rotational formulations applied for real time simulation involving friction and large deformation // Comput Mech. Springer Verlag, 2019. Vol. 64, № 3. P. 611–623.
109. Lu L., Li L., Sofonea M. A generalized penalty method for differential variational-hemivariational inequalities // Acta Mathematica Scientia. Springer, 2022. Vol. 42, № 1. P. 247–264.
110. Бокий И.Б. Численный подход к решению задачи взаимодействия двух упругих тел с учётом трения и истории приложения внешнего нагружения // Вестник ЯГУ. 2006. Vol. 3, № 3. P. 42–46.
111. Лукашевич Н.К. Расчёт конструкций с односторонними связями при динамическом действии нагрузки // Евразийское научное объединение. 2021. Vol. 2, № 72. P. 87–90.
112. Лукашевич Н.К. Численное решение задачи контакта сооружения с односторонними опорами при динамическом нагружении // Modern Science. 2021. Vol. 2, № 2. P. 380–385.
113. Станкевич И.В. Численное решение задачи теории упругости с односторонними связями с использованием метода конечных элементов в смешанной формулировке // Вестник Машиностроения. 2019. № 2. P. 3–9.
114. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с односторонним дискретным контактом // Математика и математическое моделирование. 2015. № 4. P. 93–110.
115. Аленин В.П. Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними односторонними связями // Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук. 2002. P. 34.

116. Sofonea M., Matei A. Mathematical Models in Contact Mechanics // Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 280 p.
117. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 304 p.
118. Brogliato B., Kovecses J., Acary V. The contact problem in Lagrangian systems with redundant frictional bilateral and unilateral constraints and singular mass matrix. The all-sticking contacts problem // Multibody Syst Dyn. Springer, 2020. Vol. 48, № 2. P. 151–192.
119. Dubey D., Neogy S.K. On hidden Z-matrices and the linear complementarity problem // Linear Algebra Appl. North-Holland, 2016. Vol. 496. P. 81–100.
120. Sofonea M., Xiao Y. bin. Weak formulations of quasistatic frictional contact problems // Commun Nonlinear Sci Numer Simul. Elsevier, 2021. Vol. 101. P. 105888.
121. Sofonea M., Xiao Y. bin. Well-Posedness of Minimization Problems in Contact Mechanics // J Optim Theory Appl. Springer, 2021. Vol. 188, № 3. P. 650–672.
122. Souleiman Y., Barboteu M. Numerical Analysis of a Sliding Frictional Contact Problem with Normal Compliance and Unilateral Contact // Open Journal of Modelling and Simulation. 2021. Vol. 9. P. 391–406.
123. Колесников Г.Н., Раковская М.И. Алгоритмы решения линейной задачи о дополнителности и дискретные модели механических систем // Исследованно в России. 2004. № 164.
124. Ловцов А.Д. Линейная задача дополнителности в строительной механике систем с односторонними связями. Хабаровск: Издательство ТОГУ, 2013. 198 p.

125. Ловцов А.Д. Применение алгоритма Лемке к задаче изгиба балки, взаимодействующей с упругим основанием посредством трения Кулона // Вестник гражданских инженеров. 2006. Vol. 6, № 1. P. 110–114.
126. Ловцов А.Д. Алгоритмы метода перемещений для расчёта систем с односторонними связями // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2004. № 2. P. 220–227.
127. Ловцов А.Д. Алгоритмы расчета систем с односторонними связями методом сил // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. № 3. P. 186–192.
128. Ловцов А.Д. Алгоритмы метода перемещений для расчёта систем с односторонними связями // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2004. Vol. 2, № 36. P. 220–227.
129. Ловцов А.Д., Ким Т.С. Расчет многослойных конструкций с односторонним взаимодействием слоев как плоская задача теории упругости // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса: Третьи чтения памяти профессора М. П. Даниловского. 2000. № 3. P. 203–210.
130. Fedorova V.S., Stepanova N.O., Lovtsov A.D. Lemke algorithm for analyzing of slope stability // New ideas of the new century: materials of the Eleventh International Scientific Conference of the IAS TOGU: in 2 vol. 2011. Vol. 2. P. 144–149.
131. Fedorova V.S., Lovtsov A.D. The calculation of corrugated culvert as arch, which interacts with an elastic medium through coulomb friction // New ideas of the new century: proceedings of the Thirteenth International Scientific Conference: in 3 vol. 2013. Vol. 3. P. 469–473.
132. Popov A.N., Lovtsov A.D. Frictional contact in the linear complementarity problem with gaps account // Structural mechanics and analysis of constructions. 2021. Vol. 297, № 4. P. 36–43.

133. Осипова А.В., Попов А.Н., Ловцов А.Д. Алгоритм с нарастающим параметром силового воздействия для задачи одностороннего контакта с трением // Новые идеи нового века: материалы международной научной конференции ФАД ТОГУ. 2019. Vol. 3. P. 324–330.
134. Achik Y. et al. A Fast Algorithm for Solving a Class of the Linear Complementarity Problem in a Finite Number of Steps // Abstract and Applied Analysis. Hindawi Limited, 2020. Vol. 2020.
135. Gholami F. et al. A linear complementarity formulation for contact problems with regularized friction // Mech Mach Theory. Elsevier Ltd, 2016. Vol. 105. P. 568–582.
136. Li Y., Zhang Y., Kennedy D. Reliability analysis of subsea pipelines under spatially varying ground motions by using subset simulation // Reliab Eng Syst Saf. 2018. Vol. 172.
137. Ma S., Wang T. Planar multiple-contact problems subject to unilateral and bilateral kinetic constraints with static Coulomb friction // Nonlinear Dyn. Springer Netherlands, 2018. Vol. 94, № 1. P. 99–121.
138. Meingast M.B., Legrand M., Pierre C. A linear complementarity problem formulation for periodic solutions to unilateral contact problems // Int J Non Linear Mech. 2014. Vol. 66.
139. Negrut D., Serban R., Tasora A. Posing multibody dynamics with friction and contact as a differential complementarity problem // J Comput Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 13, № 1. P. 6.
140. Pfeiffer F. Non-smooth engineering dynamics // Meccanica. Springer Netherlands, 2016. Vol. 51, № 12. P. 3167–3184.
141. Yao W.L., Gao L.L., Ren Y.S. Modeling for dynamics of rigid-body systems with friction by linear complementary problem (LCP) // Computers & Mathematics with Applications. Pergamon, 2011. Vol. 61, № 8. P. 2232–2236.

142. Zheng H., Li X. Mixed linear complementarity formulation of discontinuous deformation analysis // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. Elsevier Ltd, 2015. Vol. 75. P. 23–32.
143. Берщанский Я.М., Мееров М.В. Теория и методы решения задач дополнителъности // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. P. 5–31.
144. Li-Zhi L., Hou-Duo Q. A neural network for the linear complementarity problem // Math Comput Model. 1999. Vol. 29, № 3. P. 9–18.
145. Liao L.Z., Qi H.D., Qi L. Solving nonlinear complementarity problems with neural networks: A reformulation method approach // J Comput Appl Math. 2001. Vol. 131. P. 343–359.
146. Lemke C.E. Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming // Manage Sci. 1965. Vol. 11, № 7. P. 681–689.
147. Evers J.J.M. More with the Lemke complementarity algorithm // Math Program. 1978. Vol. 15, № 1.
148. Lemke C.E. Some pivot schemes for the linear complementarity problem // Complementarity and Fixed Point Problems. 1978. Vol. 7. P. 15–35.
149. Sargent R.W.H. An efficient implementation of the Lemke algorithm and its extension to deal with upper and lower bounds // Mathematical Programming Studies. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978. P. 36–54.
150. Cottle R.W., Pang J.-S. On solving linear complementarity problems as linear programs. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978. P. 88–107.
151. Pang J.S., Kaneko I., Hallman W.P. On the solution of some (parametric) linear complementarity problems with applications to portfolio selection, structural engineering and actuarial graduation // Math Program. Springer-Verlag, 1979. Vol. 16, № 1. P. 325–347.
152. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 224 p.

153. Mitra G. et al. Variational Inequalities and Complementarity Problems - Theory and Application // J Oper Res Soc. 1981. Vol. 32, № 9. P. 848.
154. Попов А.Н., Ловцов А.Д. Обеспечение единичной дислокации двух совпадающих узлов деформируемой системы с помощью нуль-элемента // Дальний восток: Проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2017. Vol. 1. P. 503–507.
155. Попов А.Н., Ловцов А.Д. Алгоритм расчёта задачи одностороннего контакта с трением с нарастающим параметром внешней нагрузки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. № 4.
156. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 1–596 р.
157. Попов А.Н. ContactLCP: pat. 2022669000 USA. Россия: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2022.
158. Долгачев М.В., Попов А.Н. Исследование контактных напряжений в узле опирания стальной балки с учётом величины заглубления в бетонную стену // Вестник Инженерной школы ДВФУ. 2024. № 4(61). P. 96–104.
159. Долгачёв М.В., Попов А.Н. Расчёт подпорной стенки с учётом отрыва от основания // Вестник Инженерной школы ДВФУ. 2024. № 2(59). P. 3–11.
160. Попов А.Н. Влияние очертания водопропускной трубы в высокой насыпи дорожного полотна с учётом конструктивной нелинейности // Инженерный вестник Дона. 2023. № 9. P. 1–12.
161. Попов А.Н. Расчёт системы труба-основание-насыпь как контактной задачи с трением // Инженерный вестник Дона. 2022. № 8. P. 1–9.

17

2022

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022669000

Contact LCP

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тихоокеанский государственный университет» (RU)**

Автор(ы): **Попов Александр Николаевич (RU)**



Заявка № **2022668384**

Дата поступления **07 октября 2022 г.**

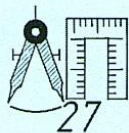
Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **14 октября 2022 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ



ООО «Лидер Пласт 27»

ИНН: 2721250410

КПП: 272101001

Адрес: 680017, г. Хабаровск,

ул. Карла Марка, д. 96А, офис -211

E-mail: LIDERPLAST27@MAIL.RU

тел. 8-984-290-00-79

25.04.2024 № 16-24
На _____

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель (зам. руководителя)
предприятия/организации

Демехов Андрей Николаевич

«25» апреля 2024 г.



АКТ

о внедрении (использовании) результатов

кандидатской диссертационной работы

Моделирование и решение задачи контакта с трением как линейной задачи
дополнительности

Попова Александра Николаевича

Комиссия в составе:

председатель генеральный директор Демехов Андрей Николаевич,

члены комиссии: главный инженер Демехова Мария Борисовна,

инженер I категории Чебровский Артем Александрович.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Попова Александра Николаевича «Моделирование и решение задачи контакта с трением как линейной задачи дополнительности», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в проекте «Лидер Пласт 27» при разработке проектной документации на выполнение комплекса ремонтно-строительных работ нежилых помещений по адресу: Амурская область, г. Благовещенск, ул. 50 лет Октября, л. 63.

Результаты диссертационной работы Попова Александра Николаевича:

1. получена постановка задачи контакта с трением в виде линейной задачи дополнительности
2. разработаны алгоритмы решения линейной задачи дополнительности для новой постановки
3. написаны программы для расчёта контактных задач в плоской постановке.
4. получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2022: ContactLCP: pat. 2022669000 USA. Россия.

1-2

Закключение: Использование указанных результатов позволяет быстро провести проверочный расчёт, повысить качество проектирования и эффективность расчёта контактирующих элементов; повысить скорость выполнения проектных работ.

Результаты внедрялись при выполнении НИР и ОКР по темам:

1. Разработка проектной документации на выполнение комплекса ремонтно-строительных работ нежилых помещений по адресу: Амурская область, г. Благовещенск, ул. 50 лет Октября, л. 63. Договор № 01/23 от 09.01.2024

Председатель комиссии:

генеральный директор
Демехов Андрей Николаевич



подпись



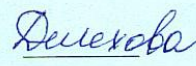
Фамилия

Члены комиссии:

главный инженер
Демехова Мария Борисовна

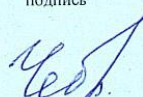


подпись



Фамилия

инженер I категории
Чебровский Артем Александрович



подпись



Фамилия

2-2

ООО «ДВПИ»
ИНН: 2721172673
КПП: 272201001

Адрес: 680017, г. Хабаровск,
ул. Тихоокеанская, д. 169/2К,
E-mail: ooo_dvpi@mail.ru

№ _____
На _____

УТВЕРЖДАЮ
Генеральный директор
ООО «ДВПИ»



АКТ

о внедрении (использовании) результатов

кандидатской диссертационной работы

Моделирование и решение задачи контакта с трением как линейной задачи
дополнительности

Попова Александра Николаевича

Комиссия в составе:

председатель генеральный директор Карман С.А.,

члены комиссии: главный инженер Балицкий Д.В.

главный конструктор Ловцов В.А. (всего 3 человека).

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Попова Александра Николаевича «Моделирование и решение задачи контакта с трением как линейной задачи дополнительности», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в проекте Группа жилых домов по ул. Тихоокеанской в Кировском районе г. Хабаровска. Жилой дом №5.

Результаты диссертационной работы Попова Александра Николаевича:

1. получена постановка задачи контакта с трением в виде линейной задачи дополнительности
2. разработаны алгоритмы решения линейной задачи дополнительности для новой постановки
3. написаны программы для расчёта контактных задач в плоской постановке.
4. получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 2022: ContactLCP: pat. 2022669000 USA. Россия.

Заключение: Использование указанных результатов позволяет быстро провести проверочный расчёт с оценкой плоского сдвига по подошве подпорных стен.

Результаты внедрялись при проектировании объекта:

1. Группа жилых домов по ул. Тихоокеанской в Кировском районе г. Хабаровска. Жилой дом №5.

Председатель комиссии:

генеральный директор

Карман С.А.



подпись

Члены комиссии:

главный инженер

Балицкий Д.В.



подпись

главный конструктор

Ловцов В.А.



подпись

ПРИЛОЖЕНИЕ В. СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тихоокеанский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по научной работе

 Купряшкин И.В.

«14» 06 2025 г.

Справка

о внедрении результатов диссертационного исследования в учебный процесс

Результаты диссертационной работы Попова А.Н. «Моделирование и решение контактной задачи с трением как линейной задачи дополненности» используются в ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет» при изучении дисциплины: «Нелинейные задачи строительной механики» для программ специалитета, специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Руководитель ВШ «ПГС»
к.т.н., доцент



Тишков Н.Л.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. ПРОГРАММА CONTACTLCP

Разработка программы (ContactLCP) на основе метода конечных элементов была вызвана необходимостью:

1. Практической реализации и численной проверки эффективности, предложенной в работе эвристической постановки и разработанных алгоритмов.
2. Исследования границ применимости разработанных алгоритмов и выявления их особенностей, включая поведение в численно сложных ситуациях (ошибки округления, вырожденность матриц), что способствует углублению понимания их работы.
3. Создания основы для дальнейшего развития и расширения предложенных методов, например, для учета других видов нелинейностей.

Программная реализация (ContactLCP) является этапом работы, подтверждающим работоспособность теоретических разработок и демонстрирующим их практический потенциал для решения сложных инженерных задач.

Программная реализация выполнена на языке программирования Python. Ниже приведён список библиотек, используемых в проекте:

- 1) NumPy. Основным критерий выбора библиотеки – удобство и скорость её работы с массивами данных. В ней реализована поддержка необходимых математических функций. В случае с МКЭ – это решение СЛАУ (`Numpy.linalg.solve`). Так же библиотека использовалась для операций с массивами: перемножение матриц, нахождение ранга матрицы, подсчёт линейных размеров массива, транспонирование и т. п.
- 2) Math. Встроенная библиотека для базовых математических операций. Например, нахождения косинуса (`cos`) или синуса (`sin`) угла.
- 3) PyQt 5. Позволяет использовать фреймворк Qt GUI (GUI – графический интерфейс пользователя) в Python.

- 4) Pyqtgraph. Библиотека, использовалась для визуализации 2D графики в GUI. Используется для построения расчётных схем, деформируемых схем, отображение усилий взаимодействия и взаимных перемещений в зоне контакта.
- 5) Scipy. Облегчает научные вычисления. Вычисление производной, интеграла, работа с разреженными матрицами (sparse matrix).

Помимо библиотек, используемых для вычислений в научной работе, так же использовалось объектно-ориентированная направленность языка программирования.

МКЭ Python. МКЭ отлично встраивается в концепцию объектно-ориентированного программирования (ООП).

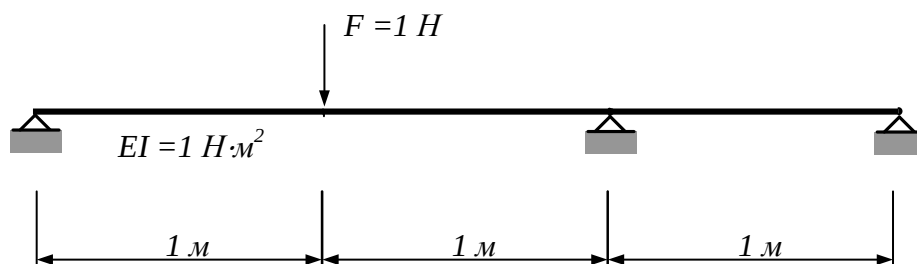
В качестве классов выбираются следующие сущности:

1. Узел. Class Node. Поля класса: координаты узла x , y ; номер узла, номера глобальных степеней свободы, список принадлежащих элементов, глобальные перемещения после деформации.
2. Элемент (родитель). Class Element. Имеет общее представление о всех элементах системы. Поля: список узлов элемента. Методы: нахождение координат узлов элемента, получение матрицы жёсткости в глобальной системе координат; получение глобальных перемещений узлов элемента; получение внутренних усилий на элементе.
 - 2.1. Нуль-элемент (наследуемый). Class ElementNull(Element). Для каждого наследуемого типа элемента реализованы свои методы родительского класса.
 - 2.2. Рамный элемент (наследуемый). Class ElementFrame(Element).
 - 2.3. Четырёх узловой элемент (наследуемый). Element4NodeLinear(Element).

Для каждого из типов элементов представлен класс-контейнер для агрегирования всех элементов в единый список объектов. В этом случае удобно реализовать цикл по элементам для формирования глобальной матрицы жесткости.

3. Матрица жёсткости. Class StriffnessMatrix. Методы формирования глобальной матрицы жёсткости; добавления граничных условий.
4. Грузовой вектор. Class LoadVector. Методы формирования глобального грузового вектора; добавления граничных условий; добавления сосредоточенной силы и собственного веса элементов.
5. Алгоритм Лемке. Class Lemke. Методы формирования начальной таблицы и решения ЛЗД методом Лемке.

Расчётная схема для рассматриваемой балки:



Пример кода Python файла «main» создания простой схемы балки показан ниже.

```

import math
from FEM.scheme import NodeContainer, StiffnessMatrix, LoadVector
from FEM.element_null import ElementNullContainer # to add null-element
from FEM.element_frame import ElementFrameContainer # to add frame element
from Visualize.plot_data_qt import PlotScheme # for visualizing
from GUI.PyQt.contactFEM import application

# входные данные
Ar = 1 # Площадь поперечного сечения рамы
Er = 1 # Модуль упругости рамы
Ix = 1 # Момент инерции сечения рамы
F = 1 # Величина внешней нагрузки

nodes = NodeContainer()
# узлы для рамы
nodes.add_node(0, 0) # 0 Узел
nodes.add_node(1, 0) # 1 Узел
nodes.add_node(2, 0) # 2 Узел
nodes.add_node(3, 0) # 3 Узел

# Узлы на которые ставятся опоры
nodes.add_node(0, 0) # 4 Узел
nodes.add_node(2, 0) # 5 Узел
nodes.add_node(3, 0) # 6 Узел

# Добавляются элементы
element_frame = ElementFrameContainer(nodes_scheme=nodes)
for i in range(3):
    element_frame.add_element(EN=[i, i+1], E=Er, A=Ar, I=Ix)
# Добавляются нуль-элементы для односторонних связей
element_null = ElementNullContainer(nodes_scheme=nodes)
element_null.add_element(EN=[4, 0], cke=1, alpha=math.pi/2, add_t_el=True)
element_null.add_element(EN=[5, 2], cke=1, alpha=math.pi/2, add_t_el=True)
element_null.add_element(EN=[6, 3], cke=1, alpha=math.pi/2, add_t_el=True)

# Матрица жёсткости
sm = StiffnessMatrix(nodes=nodes, el_frame=element_frame, el_4node=None,
el_null=element_null)
sm.support_nodes(list_of_nodes=[4, 5, 6], direction='hv') # опирание узлов

lv_const = LoadVector()
lv_const.add_concentrated_force(force=-F, degree_of_freedom=3)

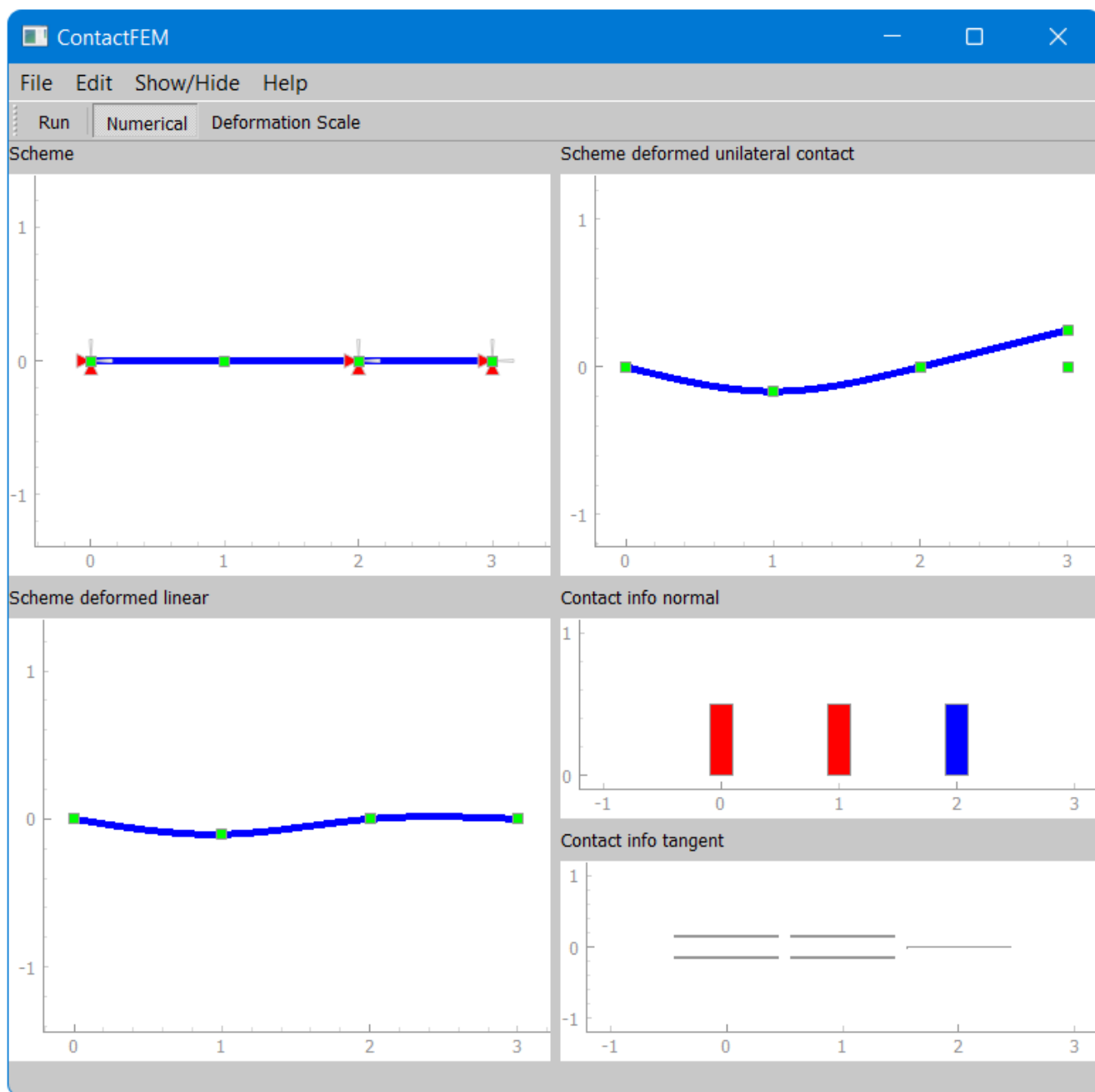
# передать все данные для расчёта
graph = PlotScheme(nodes=nodes, sm=sm, lv_const=lv_const, lv_variable=None,
element_frame=element_frame, element_container_obj=None,
element_null=element_null,
partition=10, scale_def=1, autorun=True)

# запуск приложения
if __name__ == "__main__":
    graph.fill_arrays_scheme() # сформировать данные для графики
    application(graph)

```

Результат работы приложения (GUI) показан на рисунке ниже. Слева сверху показана расчётная схема; слева снизу – деформированная схема, решение в основной системе МП (двусторонние связи); справа сверху – деформированная схема, результат решения ЛЗД; справа внизу – графики, показывающие, усилия

взаимодействия x и взаимные перемещения z по нормали и по касательной к зоне контакта. Следует отметить, т.к. нагрузка задавалась вертикальная, то усилия и перемещения по касательной к зоне контакта отсутствуют.



Окно работы программы