

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»
(ТГАСУ)

На правах рукописи

ТРЕПУТНЕВА ТАТЬЯНА АЛЕКСЕЕВНА

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА
ПОДКРЕПЛЁННЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК
С НАЧАЛЬНЫМ ПРОГИБОМ
ПРИ СИЛОВОМ И ТЕМПЕРАТУРНОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

2.1.9 – Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
к.т.н., доцент Моисеенко М. О.

Томск 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Обзор работ по расчёту подкреплённых прямоугольных пластин и пологих оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей, начальных прогибов и неоднородных свойств материала, зависящих от температуры	10
1.1. Анализ работ по расчёту пластин и оболочек с начальными несовершенствами формы срединной поверхности	10
1.2. Анализ работ по определению напряжённо-деформированного состояния пластин и пологих ребристых оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей	16
1.3. Анализ работ по определению напряжённо-деформированного состояния гибких ребристых пластин и пологих оболочек	18
1.4. Анализ работ по расчёту неоднородных пластин и оболочек	21
1.5. Выводы по первой главе	25
2. Анализ методов расчёта подкреплённых прямоугольных пластин и пологих оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей, начальных прогибов и свойств материала, зависящих от температуры	26
2.1. Теории деформирования элементов конструкций, материал которых зависит от вида напряжённого состояния	26
2.2. Методы решения задач с учётом неоднородности при совместном учёте физической и геометрической нелинейностей	28
2.3. Методы расчёта пластин и пологих оболочек и конструкций из них	34
2.4. Поиск варьируемых параметров функций перемещений	38
2.5. Выводы по второй главе	39
3. Постановка задачи и описание метода расчёта подкреплённых неоднородных прямоугольных пластин, пологих оболочек и конструкций из них с начальным прогибом с учётом физической и геометрической нелинейностей ..	41
3.1. Постановка задачи и расчётная схема конструкции	41
3.2. Зависимости, характеризующие напряжённо-деформированное состояние элементов конструкции	43

3.3. Функционал полной потенциальной энергии системы тело-нагрузка в форме Лагранжа	49
3.4. Применение вариационного метода Ритца	55
3.5. Исследование сходимости разработанного алгоритма расчёта. Тестирование алгоритма	60
3.6. Выводы по третьей главе	69
4. Напряжённо-деформированное состояние подкреплённых пластин и пологой оболочки с начальным прогибом за пределом упругости материала при действии поперечной нагрузки	71
4.1. Определение напряжённо-деформированного состояния ребристой пластины с начальным прогибом при действии несимметричной поперечной нагрузки	71
4.2. Анализ влияния начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние подкреплённой цилиндрической оболочки с учётом физической и геометрической нелинейностей	115
4.3. Определение напряжённо-деформированного состояния пластины с разным уровнем смещения центральной опоры при действии поперечной нагрузки	121
4.4. Изгиб за пределом упругости гибкой подкреплённой ребром пластины с начальным прогибом	126
4.5. Определение напряжённо-деформированного состояния подкреплённой пластины с начальным прогибом со свойствами материала, зависящими от температуры	134
4.6. Выводы по четвёртой главе	145
Заключение	149
Список литературы	151
Приложение 1 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ	180
Приложение 2 Документы, подтверждающие внедрение результатов диссертационной работы	181

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Конструкции, составленные из гибких оболочек и пластин, применяются в машиностроении, авиации, судостроении, ракетостроении. В промышленном и гражданском строительстве – это перекрытия и покрытия, навесы, козырьки и т. д. Для увеличения жёсткости оболочки и пластины часто выполняются ребристыми. Напряжённо-деформированное состояние (НДС) подобных конструкций в местах присоединения рёбер более сложное по сравнению с конструкциями, выполненными из гладких пластин и оболочек.

Гибкие пластины и оболочки в ненагруженном состоянии часто имеют некоторые отклонения от первоначальной геометрической формы (начальные прогибы). Начальные прогибы возникают в процессе изготовления, транспортировки, монтажа и эксплуатации конструкций.

В процессе эксплуатации конструкции могут испытывать не только силовые нагрузки, но и температурные воздействия. Изменение температуры влечёт за собой изменение механических характеристик материала. Снижение модуля упругости при увеличении температуры вызывает уменьшение жёсткости конструкции, что приводит к необходимости проведения уточнённых расчётов. Неучёт влияния изменения характеристик материала от температуры при проектировании приводит к существенным погрешностям при расчёте НДС конструкции.

Величины перемещений и напряжений ребристых пологих оболочек и пластин, полученные в линейной постановке, значительно отличаются от величин, вычисленных с учётом физической и геометрической нелинейностей. Совместный учёт обеих нелинейностей, начальных прогибов, а также учёт изменения свойств материала от действия температуры значительно уточняет математическую модель для подкреплённых гибких пластин и оболочек, что позволяет получить более полное представление о НДС конструкции.

В настоящее время отсутствует единый подход к расчёту подкреплённых

гибких пластин и пологих оболочек с одновременным учётом геометрических начальных несовершенств, нелинейных зависимостей и температуры. Поэтому задача развития метода расчёта подкреплённых тонкостенных конструкций с учётом вышеперечисленных особенностей является актуальной.

Степень разработанности темы. Основы расчёта ребристых оболочек и пластин были заложены В.З. Власовым, А.И. Лурье, которые на основе ряда допущений установили аналитическую зависимость между самой конструкцией пластины, оболочки и подкрепляющих её элементов.

Исследованию напряжённо-деформированного состояния подкреплённых оболочек и пластин посвящены работы отечественных и зарубежных авторов: Н.П. Абовского, А.В. Александрова, С.А. Амбарцумяна, И.А. Биргера, Т.П. Виноградовой, В.З. Власова, А.С. Вольмира, Г.Д. Гавриленко, Л.В. Енджиевского, А.А. Ильюшина, В.А. Заруцкого, Б.Я. Кантора, В.В. Карпова, В.И. Климанова, Л.С. Ляховича, Х.М. Муштари, Ю.В. Немировского, В.В. Петрова, А.И. Стрельбицкой, А.Г. Тамразяна, В.Н. Филатова, А.М. Черняка, L.H. Donnell, T. Karman, I.H. Marshall, T.F. Reissner, T. Yang и многие другие.

Влияние начальных несовершенств, физической, геометрической нелинейностей, а также изменение температуры на прочность и жёсткость конструкции рассмотрено в ограниченном количестве работ. Проектирование и оценка НДС тонкостенных конструкций с начальными прогибами и неоднородными свойствами материала, зависящими от температуры с учётом ограниченных пластических деформаций при перемещениях, сравнимых с толщиной элемента, представляет определенные сложности. Для более полного представления о НДС всей конструкции и её отдельных элементов с учётом вышеперечисленных особенностей необходимы новые численные и аналитические исследования.

Цель исследования:

Разработка численно-аналитического метода расчёта системы подкреплённых пластин и пологих оболочек с начальными прогибами и свойствами материала, зависящими от температуры, при действии поперечной статиче-

ской нагрузки с одновременным учётом физической и геометрической нелинейностей.

Для достижения цели исследования были поставлены следующие задачи:

- разработать физико-математическую модель деформирования прямоугольных подкреплённых пологих оболочек, пластин и сочленённых из них тонкостенных конструкций с учётом начального прогиба, геометрической и физической нелинейностей при силовых и температурных воздействиях с учётом упругопластических деформаций и зависимости свойств материала от температуры;
- обосновать выбор метода для линеаризации физических уравнений упругопластического деформирования тонкостенных элементов конструкций, позволяющего учитывать вышеперечисленные факторы;
- разработать алгоритм и программу расчёта физически и геометрически нелинейных задач для подкреплённых пологих оболочек, пластин и сочленённых из них тонкостенных конструкций, находящихся под действием силовой нагрузки и температуры, учитывающих соизмеримый с толщиной пластины начальный прогиб. Оценить сходимость и точность разработанного алгоритма расчёта;
- провести численный анализ параметров напряжённо-деформированного состояния гибких пластин и пологой оболочки с учётом влияния: физической, геометрической нелинейностей и их совместного учёта, величины и знака начального прогиба, величины силовой нагрузки и температуры.

Объект исследования: подкреплённые гибкие пластины, пологие оболочки и сочленённые из них прямоугольные конструкции с начальным прогибом.

Предмет исследования: прочность и деформативность тонкостенных прямоугольных в плане подкреплённых пологих оболочек, пластин, и сочленённых из них конструкций при упругопластических деформациях от действия силовой нагрузки и температуры при прогибах, сравнимых с толщиной пластины.

Методология и методы исследования. Методологической основой исследования послужили труды отечественных и зарубежных учёных в области изучения подкреплённых тонкостенных конструкций, а также методы строительной механики, вычислительной математики, теории упругости и пластичности. Исполь-

зованы: энергетический метод, следующий из вариационного принципа Лагранжа и метод прямого поиска для определения варьируемых параметров функций перемещений. Метод переменных параметров упругости (МППУ), который при активном нагружении позволяет свести решение задачи деформационной теории пластичности к решению последовательности физически линейных задач теории упругости. Метод Симпсона для вычисления определённых интегралов.

Научная новизна работы:

- разработана физико-математическая модель деформирования прямоугольных подкреплённых пологих оболочек, пластин и сочленённых из них конструкций, позволяющая одновременно учитывать начальный прогиб, геометрическую и физическую нелинейности при термосиловых воздействиях с учётом ограниченных упругопластических деформаций;

- на основе разработанной модели и выбранного энергетического метода решения разработан алгоритм и программа для расчёта задач статики пластинчатых конструкций с начальным прогибом, находящихся под действием силовой нагрузки и температуры, с учётом нелинейного характера работы материала (физической и геометрической нелинейностей).

- на основании численных исследований получены и систематизированы новые данные по влиянию начального прогиба подкреплённых пластин, пологой оболочки и конструкций из них, нагруженных распределённой нагрузкой на напряжённо-деформированное состояние. Рассмотрены перемещения пластины при ограниченных по величине упругопластических деформациях. Исследовано влияние изменения температуры на напряжённо-деформированное состояние подкреплённых пластин и пологой оболочки с начальными прогибами при упругопластических деформациях.

Личный вклад диссертанта заключается:

- в постановке задач теоретического исследования;
- разработке математической модели деформирования подкреплённых пологих оболочек и пластин с начальным прогибом;

- разработке алгоритма и программы расчёта таких элементов конструкций и систем из них при силовых и температурных нагружениях;
- обработке и анализе полученных результатов расчётов.

Достоверность результатов основана на:

- использовании положений теории упругости и пластичности, строгой математической постановке задачи по теории пластин и оболочек, корректном решении дифференциальных уравнений;
- исследовании сходимости разработанного метода расчёта пологих оболочек и пластин с начальным прогибом с учётом нелинейностей (физической и геометрической) и физико-механических свойств материала, зависящих от температуры, подтверждённой путём сравнения полученных результатов с данными других авторов.

Положения, выносимые на защиту:

- физико-математическая модель деформирования прямоугольных в плане подкреплённых пологих оболочек, пластин и их сочленений при силовом и температурном воздействии с учётом начальных прогибов, физической и геометрической нелинейностей;
- численно-аналитический метод исследования деформирования прямоугольных в плане подкреплённых пологих оболочек и пластин, находящихся под действием силовой нагрузки и температурного воздействия при разной величине начальных прогибов, в линейной и нелинейной постановках;
- результаты исследования влияния величины начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние гибких пластин и пологой оболочки при термосиловом воздействии при упругопластических деформациях.

Теоретическая значимость работы заключается: в развитии теории расчёта подкреплённых пластин, пологих оболочек и состоящих из них конструкций, имеющих начальный прогиб; в получении аналитической зависимости одновременно учитывающей нелинейные факторы и начальный прогиб при действии силовой нагрузки и температуры.

Практическая значимость работы заключается: в создании алгоритма расчёта и основанного на нём программного продукта, позволяющего опре-

делять характеристики НДС подкреплённых тонкостенных элементов конструкций с начальным прогибом при учёте физической и геометрической нелинейностей; в возможности использования разработанного метода расчёта подкреплённых пологих оболочек и пластин с начальными прогибами с учётом физической и геометрической нелинейностей в проектных организациях и учебном процессе строительных вузов. Метод позволяет провести анализ НДС и оценить запас прочности и жёсткости указанных конструкций.

Апробация работы. Материалы диссертационной работы были доложены, обсуждены и получили одобрение на: Всероссийской конференции молодых учёных в институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича (г. Новосибирск, 2012 г.); Первой Всероссийской конференции молодых учёных (г. Томск, 2013); IX Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015 г.), III Международной научной конференции молодых учёных «Молодёжь, наука, технологии: новые идеи и перспективы» (г. Томск, 2016 г.); X всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (г. Томск, 2018 г.); XIV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (г. Новосибирск, 2021г.); научных семинарах кафедр «Строительная механика», «Железобетонные и каменные конструкции»; «Металлические и деревянные конструкции» ТГАСУ (2016–2021 гг.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано восемнадцать печатных работы в научных журналах, сборниках и трудах конференций. Из них десять статей опубликовано в научных журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК, четыре статьи в журналах, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science, и одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, основных выводов, заключения, списка литературы и приложений. Диссертация содержит 182 страницы машинописного текста, 82 рисунка, 13 таблиц, библиографический список из 245 наименований и 2 приложения.

ГЛАВА 1

ОБЗОР РАБОТ ПО РАСЧЁТУ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ, НАЧАЛЬНЫХ ПРОГИБОВ И СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

На прочность и жёсткость элементов конструкций влияют множество факторов: нелинейный характер диаграммы деформирования материала; механические свойства материала конструкции, зависящие от температуры; начальные несовершенства формы (начальные прогибы); начальные напряжения; подкрепления; несимметричный вид нагружения; граничные условия; наличие стыков панелей разной толщины; воздействие внешней среды и т.д.

1.1. Анализ работ по расчёту пластин и оболочек с малыми начальными несовершенствами формы срединной поверхности

Анализ работ [12, 14, 26, 29, 48, 62, 63, 69, 81, 111, 137, 173, 192, 208, 209, 217, 218, 234, 236, 238] показывает, что даже малые отклонения в геометрической форме элементов конструкций приводят к существенному изменению их напряжённо-деформированного состояния.

Гладкие пластинки и оболочки

Вопрос об устойчивости оболочки со случайными несовершенствами формы был рассмотрен В.В. Болотиным [27]. Впоследствии появилось большое число работ [92, 93, 118, 121, 127, 231], в которых было проведено теоретическое, экспериментальное и статистическое изучение поведения оболочек со случайными несовершенствами.

Устойчивость тонкостенных элементов конструкций с начальной погибью исследована достаточно подробно только при работе материала в упругой области.

Т.П. Виноградова в работе [36] привела результаты качественных исследований влияния начального прогиба на изгиб гибких пластин при упругопластическом деформировании.

Изгиб неидеальных неупругих цилиндрических оболочек с остаточными напряжениями рассмотрели В.С. Гудрамович, А.Ф. Деменков, С.Н. Коныхов в работе [64].

А.С. Дехтярь в работе [68] определял предельную нагрузку для шарнирно опертых пологих оболочек из идеально жёсткопластического материала с выпуклой срединной поверхностью, имеющих углубления разного профиля для равномерно-распределённой нагрузки. Расчёт вёлся кинематическим методом теории предельного равновесия.

Е.П. Борзых, Г.К. Хайдуковым, В.В. Шугаевым [29] определено НДС пологих железобетонных оболочек с учётом неидеальной кривизны их срединной поверхности. Обнаружено изменение прогибов в местах изменения кривизны поверхности. Приведена методика расчёта.

В работах В.В. Букши, О.В. Машкина, В.В. Рогалевича [33], С.С. Канн в работе [89] без учёта геометрической нелинейности проводятся расчёты на прочность и устойчивость пластин и пологих оболочек малого прогиба при начальном изгибе опорного контура.

Х.М. Муштари [148] рассмотрел упругое равновесие тонкой оболочки с начальными неправильностями формы срединной поверхности, ввёл основные зависимости об упругом равновесии, рассмотрел сплюснутую оболочку вращения и определил верхнее критическое давление. А.С. Вольмиром [39] рассмотрено влияние начального прогиба на деформацию гибких пластин при однородных граничных условиях.

В работе В.Л. Якушева [212, 245] рассматривалось изменение НДС тонкостенных элементов конструкций, вызываемые отклонениями геометрической формы. Проведён анализ нелинейного деформирования и устойчивости тонких оболочек.

I.H. Marshall, J. Rhodes [226] рассмотрели поведение шарнирно закреплённой по всему контуру гибкой прямоугольной ортотропной пластины с начальным прогибом, нагруженной распределённой поперечной нагрузкой. Решение отыскивалось методом Ритца. Составлена система нелинейных ал-

гебраических уравнений, содержащих зависимость «нагрузка-прогиб». Аналитические исследования сопоставлены с результатами проведенных авторами экспериментов.

В работе Д.В. Бабича, Л.А. Дериглазовой [18] несовершенства формы учитывались посредством кривизны срединной поверхности. Определялись характеристики НДС пологих железобетонных оболочек с несовершенствами формы срединной поверхности.

Е.А. Гоцуляк и Д.Э. Присов [59] с помощью теории катастроф исследовали устойчивость тонкостенных несовершенных оболочек.

В.В. Рогалевич, С.Д. Корсаков, Г.Е. Пределина [176] на основе метода переопределения граничной коллокации рассмотрели влияния начального прогиба по полю и контуру, а также начальных изгибов краев упругих гибких пластин и пологих оболочек постоянной и переменной толщины на НДС и устойчивость. При определенных нагрузках искривленные пластины прощелкиваются.

Huyan Xraazhi [223] провёл нелинейный анализ круговых цилиндрических оболочек с начальным прогибом при сжатии и изгибе с учётом поперечного сдвига методом конечных элементов. В работе проанализированы нелинейное деформирование, устойчивость.

А.В. Саченков, В.Г. Выборнов [178] рассмотрели устойчивость тонкостенных элементов с учётом несовершенств формы. Анализ устойчивости тонких пластин, цилиндрических оболочек несовершенной формы представлен в работах И.Я. Амиро, В.Г. Полякова, В.Г. Паламарчука [6], В.Г. Выборнова [40].

Ребристые пластины и оболочки.

В монографиях [45, 47] Г.Д. Гавриленко описан расчёт на прочность и устойчивость ребристых цилиндрических оболочек с несовершенствами формы. Основные нелинейные и линеаризованные уравнения приведены в статьях [43, 219-221]. С помощью нелинейных и обобщенных линеаризованных уравнений методом сеток проведено исследование влияния локальных и регулярных осесимметричных прогибов на критические нагрузки. В работах [41, 42, 44, 220] изложена методика численного расчёта докритического состояния: перемещений,

деформаций, напряжений для ребристых оболочек. Наличие шпангоутов и начального прогиба приводит к тому, что НДС каждого отсека между шпангоутами, либо всей оболочки неоднородно.

В.И. Климанов, С.А. Тимашев [100] провели расчёт на прочность и жёсткость ребристых гибких оболочек с начальным прогибом без учёта физической нелинейности.

В.Н. Чернышов, Н.П. Абовский, А.С. Павлов в работе [204] при рассмотрении гибкой ребристой оболочки с начальными несовершенствами формы предложили методику построения линеаризованного функционала, рассмотренного на примере метода последовательных нагружений.

О.И. Теребушко, А.В. Адуевский [191] на основании анализа докритического и закритического равновесных состояний подкреплённых панелей с несовершенствами сделали ряд выводов о том, что для панелей с высокими рёбрами на критическую нагрузку необходимо знать реальные величины начальных неправильностей. Установлено, что погрешность определяемой величины критической нагрузки может составлять до 40 %.

Р.П. Моисеенко [145] рассмотрел оптимизацию тонких пластин, подкреплённых рёбрами при заданной частоте собственных колебаний.

В работе Wang Hu, Wang Tsunkuei [242] рассмотрен вариант технической теории нелинейного поведения подкреплённых, слоистых, композитных, усечённых конических оболочек при действии произвольных нагрузок. Получены уравнения смешанного типа. Рассмотрено влияние подкрепления с эксцентриситетом и начальных несовершенств на поведение оболочек.

Экспериментальные исследования напряжённо-деформированного состояния и устойчивости пластин и оболочек с несовершенствами геометрической формы описаны в работах А.П. Гайдученко, В.В. Гнатюка, В.С. Гудрамовича, А.Ф. Деменкова, С.С. Ищенко, И.В. Куранова, В.И. Мацнера, А.М. Мильцына, В.И. Олевского, В.В. Плетина, Р.Б. Рикардса, Э.Ф. Сивака, Г.А. Тетерса, С.А. Тимашева и других.

А.В. Гемерлинг в работе [49] проводил испытания стальных сварных цилиндрических оболочек со шпангоутами на сжатие. Все вмятины и выпуклости были плавными. Нагружение проводилось ступенями с постепенным уменьшением нагрузки. Полученные экспериментально значения критических напряжений ниже, чем теоретические. Что объясняется в работе появлением начальных напряжений, вызванных дефектом формы поверхности, появляющимися (из-за) при наложении кольцевых швов.

А.И. Кукарина, В.И. Мацнер, Э.Ф. Сивак в работе [114] представили результаты теоретических и экспериментальных исследований влияния начальных прогибов ребристых цилиндрических оболочек. Учёт начальных прогибов сокращает расхождение между значениями, полученными при экспериментальных и теоретических исследованиях.

Л.М. Маневич, А.М. Мильцын, В.И. Мосаковский в работе [129] приводят экспериментальные исследования на устойчивость гладких цилиндрических оболочек различных масштабов. Рассматривалась деформация конструкций при осевом сжатии с учётом начальных возмущающих факторов.

R.E.McConnel, F.A. Fathelbab, D. Hatzis [227] приводят сравнение результатов расчета и эксперимента решётчатых куполов с начальным прогибом. Расчёты выполнены в приращениях методом Ньютона-Рафсона. Оценивается влияние начальных неправильностей. Наблюдается удовлетворительное совпадение результатов расчёта с результатами эксперимента.

В работе G.J. Simites [237] представлен обзор работ по исследованию устойчивости геометрически несовершенных цилиндрических оболочек, состоящий из 129 работ, выполненных до 1986 г. Работы включали в себя исследования влияния на НДС геометрических, конструктивных несовершенств; граничных условий; эксцентриситета нагрузки; момент наступления докритического состояния.

И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий в обзоре [7] представили основные результаты экспериментальных исследований ребристых конических оболочек в статической и динамической постановках, выполненных на протяжении 30 лет в

институте механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. Исследования проводились по влиянию начального прогиба на частоты и формы собственных колебаний оболочек. Установлено, что осесимметричная погибь практически не влияет на вычисленные частоты, но приводит к существенному изменению форм колебаний.

В.Н. Добровольским, А.П. Колодяжным [71] приведены результаты экспериментального исследования несущей способности тонкостенных стальных ребристых пластин с различным расположением подкрепляющих рёбер по их ширине в зависимости от величины начальных несовершенств.

В.Б. Крицкий, П.Ф. Золотарев, Ю.М. Родичев [107] представили результаты теоретико-экспериментального исследования НДС и несущей способности цилиндрической оболочки, имеющей начальный прогиб подверженной воздействию внешнего давления. Расчёт выполнен методом конечных элементов.

С.С. Ищенко [86] провёл экспериментальные исследования на малых моделях из тонколистовой стали подкреплённых палубных пластин на воздействие от колесной техники. Исследован характер распределения усилий в пластине по контуру нагруженной панели с ростом пластических деформаций настила палубы; характер распределения полей полного и остаточного прогиба настила и подкрепляющего набора нагруженной панели при многократном нагружении; характер работы продольных рёбер жёсткости.

Неупругий расчёт.

В работе Б.М. Броуде [31] рассмотрено влияние начального искривления на устойчивость круговой цилиндрической оболочки за пределом пропорциональности.

В.С. Гудрамовичем [65] рассмотрен изгиб и несущая способность неупругих цилиндрических оболочек с начальным прогибом и остаточными напряжениями.

В.Г. Зубчанинов [82] рассмотрел устойчивость и выпучивание упруго-пластических конструкций при сложном нагружении. Отмечено, что чувствительность к несовершенствам в пластической стадии работы имеет место в той же мере, что и в упругой стадии. При исследовании выпучивания конструкций с несо-

вершенствами формы отмечено, что неустойчивость наступает в точках бифуркации или предельных точках, тех же, как и для идеальных пластических конструкций с устойчивым после бифуркационным поведением. Отмечено также, что потеря устойчивости конструкции после её докритического выпучивания или деформирования характеризуется внезапным и значительным развитием деформаций.

В.В. Кабановым, Г.И. Курцевичем [87, 88] исследована устойчивость за пределом упругости свободно опертых, сжатых по краям, круговых цилиндрических оболочек с осесимметричными начальными прогибами. Использована теория малых упругопластических деформаций. Исследовано влияние регулярных и локальных начальных прогибов для оболочек различной толщины при осесимметричной и неосесимметричной формах потери устойчивости.

1.2. Анализ работ по определению напряжённно-деформированного состояния пластин и пологих ребристых оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей

Значительный вклад в разработку теории и способов расчёта физически нелинейных задач пластин и оболочек внесли работы Н.П. Абовского, И.А. Биргера, А.С. Григорьева, О. Зенкевича, А.А. Ильюшина, Б.Я. Кантора, В.В. Карпова, Л.М. Качанова, В.А. Крысько, М.С. Корнишина, В.И. Королева, П.А. Лукаша, В.А. Мяченкова, Ю.В. Немировского, И.Г. Овчинникова, В.В. Петрова, Ю.Н. Работнова, А.Р. Ржаницына, Р.С. Санжаровского, В.В. Соколовского, Н.И. Столярова, А.И. Стрельбицкой, А.Г. Угодчикова, И.С. Цуркова, А.И. Цурпала, Н.А. Шульги, L.H. Donnell, Ph. G. Hodge, H.G. Hopkins, W. Olszak, E. Reisner, A. Sawczuk и других.

Решение физически нелинейных задач строится на различных итерационных и шаговых методах. Первый из итерационных методов – метод дополнительных нагрузок (МДН), предложен А.А.Ильюшиным [85]. И.А. Биргером предложен метод переменных параметров упругости (МППУ) [24]. Ре-

зультаты расчётов показывают их быструю сходимость [161]. Также применяется комбинация этих методов [75].

При решении физически нелинейных задач часто применяется метод Ньютона-Контаровича [160], сходимость которого более быстрая по сравнению с МДН и МППУ, хотя в этом случае на одну итерацию требуется больше времени. В.В. Петров [158] предложил применять метод последовательных нагружений. Для уточнения решения на каждом шаге применяется двухшаговый метод последовательного возмущения параметров.

Задачи упругопластического деформирования ребристых, ослабленных вырезами и отверстиями оболочек, с подкрепляющими рёбрами представлены работами [67, 97, 99, 134, 174, 181] и других авторов.

Упругопластическое деформирование жёстких ребристых пластин и оболочек рассмотрено в работах S.E. Webb, P.J. Dowling [243], A.W. Wegmuller [244], Э.В. Годзевич и В.И. Климанова [52, 53], В.С. Гудрамовича [66], Л.В. Енджиевского [74], Колева Драгия [103], В.Ф. Курылева [117], Н.И. Мандриты [128], В. Moller [229], W.S. Peterson, C.M. Kostem, J.M. Kulicki [233], И.Я. Петуховой [161], А.А. Потапкина [171], В.В.Фурсова, В.С. Данкова [203] и других.

Задачи расчёта подкреплённых пластин и оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей представлены в работах В.Г. Годзевича, Э.В. Годзевич [51], Л.Е. Енджиевского [75], Н.И. Марчука [131], О. Hirokazu и J. Huminovi [222], А.А. Яковлева [210] и других авторов.

В работах [137, 144, 165, 198] авторами проведено исследование НДС подкреплённых гибких пластин с начальным прогибом, нагруженных распределённой нагрузкой с учётом двойной нелинейности (физической и геометрической).

Расчёты конструкций, состоящих из системы ребристых пластин и оболочек с учётом двойной нелинейности, представлены в работах О.Н. Попова [168], М.О. Моисеенко, О.Н. Попова, А.П. Малиновского [143, 166], М.В. Стрельбицкого [186] и других авторов.

В работе О.Н. Попова [168] приведён эффективный способ расчёта тонкостенной конструкции, состоящей из ряда гладких или конструктивно

ортотропных пластин и пологих оболочек, подкреплённых главными рёбрами жёсткости одного направления, с учётом физической и геометрической нелинейностей.

М.О. Моисеенко в работе [143] предложен и реализован вариационный энергетический подход в форме Лагранжа с разбиением конструкции на укрупненные элементы методом перемещений. Объектом исследования являлись разномодульные прямоугольные пластины и пологие оболочки переменной толщины с прямоугольными отверстиями и утолщениями с учётом физической и геометрической нелинейностей.

В монографии О.Н. Попова, А.П. Малиновского, М.О. Моисеенко [166] приведены результаты исследования НДС системы прямоугольных пластин и пологих оболочек, дискретно подкреплённых рёбрами жёсткости, с учётом физической и геометрической нелинейностей и разномодульности материала.

Э.В. Антоненко [11], М.В. Стрельбицким [186] рассмотрено влияние физической и геометрической нелинейностей на НДС конструкции из цилиндрических оболочек со шпангоутами при нагружении внутренним давлением.

1.3. Анализ работ по определению напряжённо-деформированного состояния гибких ребристых пластин и пологих оболочек

Основные положения теории ребристых оболочек были разработаны В.З. Власовым [38] и А.И. Лурье [125]. При составлении уравнений равновесия ребра мысленно отделялись от оболочки и заменялись реакциями, которые в дальнейшем исключались из уравнений равновесия. А.И. Лурье трактовал ребра как стержни Клебша, а В.З. Власов рассматривал их как тонкостенные стержни. Представителями первого направления являются Е.С. Гребень [60] и В.А. Заруцкий [79], а второго – В.П. Ильин и Н.И. Карпов [84, 94].

Нелинейная теория ребристых оболочек и пластин обусловлена геометрическими свойствами тонкостенной конструкции, в которой под действием нагрузки могут возникать перемещения, сравнимые с их толщиной. В

этих случаях оболочку следует рассматривать с позиций геометрически нелинейной теории.

Исследованием НДС пологих ребристых оболочек с учётом нелинейности занимались О.И. Теребушко [189], И.Е. Милейковский, И.П. Гречанинов [133], В.П. Ильин [84], В.В. Карпов [94] и др.

В статье О.И. Теребушко [186] приведены результаты теоретико-экспериментальных исследований закритических состояний цилиндрической оболочки, подкреплённой редко расставленными упругими рёбрами. Решение проводилось на основе двух нелинейных уравнений смешанного метода. Предполагалось, что деформация оболочки симметрична относительно продольных ребер. Это позволило выделить одну панель, ограниченную соседними продольными рёбрами и рассмотреть устойчивость и закритическую деформацию конструкции.

И.Е. Милейковский и И.П. Гречанинов [133] применили метод Бубнова-Галёркина при расчёте на устойчивость пологих прямоугольных ребристых оболочек в перемещениях. Для оболочек с симметричными граничными условиями при действии вертикальной равномерно распределённой нагрузки, приведены результаты исследования влияния дискретного расположения рёбер на величины критических напряжений. Показано, что рёбра повышают верхнюю и нижнюю критические нагрузки.

В.П. Ильин и В.В. Карпов [84] рассмотрели находящиеся под действием распределённой поперечной нагрузки гибкие прямоугольные пологие оболочки, эксцентрично подкреплённые ортогональной сеткой рёбер, с учётом деформации поперечного сдвига. Высота рёбер и их расположение вводились с помощью единичных функций, что позволило учесть их влияние на сдвиг и кручение срединной поверхности оболочки. Если рёбра узкие, то можно приближенно считать, что они приложены по линии, и ввести их с помощью дельта функций. Основные соотношения теории ребристых оболочек получаются из вариационного принципа Лагранжа.

Г.О. Кипиани, Д.О. Кипиани, Э.П. Мачаидзе [97] исследовали НДС и

устойчивость трёхслойных пластинчатых систем с прямоугольным разрезом и отверстием, края которого подкреплены рёбрами, с учётом физической и геометрической нелинейностей.

В работе Г.Д. Гавриленко, И.Ф. Дудника, И.Ф. Ларионова [46] получено решение задач по определению НДС и устойчивости ребристых цилиндрических оболочек с осесимметричными начальными прогибами при нелинейном неоднородном докритическом состоянии. Применялась методика численного расчёта на устойчивость несовершенных ребристых цилиндрических оболочек при нелинейном неоднородном докритическом состоянии с учетом дискретности рёбер.

Анализ результатов экспериментальных исследований показывает разброс значений критических нагрузок. Это объясняется влиянием отклонений от расчётной схемы. Основными причинами такого разброса являются несовершенства формы срединной поверхности оболочки и подкрепляющих её рёбер; неравномерность, а иногда и эксцентричность приложения нагрузки к торцам оболочки и связанная с этим неоднородность её НДС; разброс параметров, характеризующих физико-механические свойства применяемых материалов; разброс в геометрических размерах. Современное состояние экспериментальных исследований представлено в работах И.Я. Амиро [7], В. Арбача [12], О.И. Теребушко [190], С.А. Тимашева [193, 194], А.А. Яковлева [211].

Учёт дискретности размещения рёбер.

Обзор работ и анализ современного состояния исследований в области НДС и устойчивости ребристых оболочек изложили И.Я. Амиро и В.А. Заруцкий [5, 7]. Основное внимание уделено работам, в которых учтено дискретное размещение рёбер. Обсуждены постановки задач, методы их решения и основные результаты теоретического и экспериментального изучения особенностей поведения ребристых оболочек при потере устойчивости. Уравнения равновесия записаны, а потенциальная энергия деформаций вычислена с учётом слагаемых, учитывающих геометрическую нелинейность. При определении критических нагрузок разыскивалась предельная точка кривых «нагрузка – характерный параметр деформирования» [46]. Наглядно проявляется необходимость

учёта дискретного размещения рёбер, когда изучается влияние их числа или несимметричного расположения на величины критических напряжений. В работах [94, 100] отмечается, что игнорирование факта дискретного размещения рёбер приводит к завышенным величинам критических напряжений.

Работа В.Н. Завьялова [78], с одной стороны дополняет рассмотрение объектов из гибких пластин, так как в ней ведётся расчёт не обособленных пластин, а ряда пластин, соединенных в единую конструкцию [3, 76, 205]. С другой стороны, рассматривались пластинчато-стержневые системы, в которых панели, входящие в систему, рассчитывались по геометрически нелинейной теории, что позволило уточнить НДС конструкции по сравнению с линейной теорией пластин.

Проведённый анализ работ по расчёту подкреплённых пластин и оболочек с одновременным учётом физической и геометрической нелинейностей указывает на незавершённость общей теории расчёта упомянутых элементов конструкций. Разработка способов, позволяющих в сравнительно простой форме решать задачи ребристой тонкостенной конструкции с учётом физической и геометрической нелинейностей и начального прогиба, остается актуальной. Таким образом, необходимы дальнейшие исследования в этой области с целью развития теории и разработки практических методов расчёта упомянутых конструкций.

1.4. Анализ работ по расчёту неоднородных пластин и оболочек

Одним из свойств материалов, влияющих на напряженно-деформированное состояние конструкций, является их неоднородность. Для исследования напряженно-деформированного состояния необходимо знать и учитывать законы распределения неоднородных свойств материала в элементах конструкций [8, 9, 13, 17, 25, 28, 54, 155, 232]. Публикаций, в которых учитывается нелинейность и неоднородность материала очень мало, что связано с отсутствием экспериментальных данных по влиянию различных факторов на параметры, определяющие нелинейное поведение материалов [4, 17,

22, 25, 70, 72, 80, 90, 101, 105, 112, 113, 119, 122, 130, 215, 230]. Обзор работ, посвящённых расчёту пластин и оболочек с учётом неоднородности материала, связанной с изменением свойств материала, приведён в работе [167].

Нелинейность диаграммы деформирования материала существенно изменяет картину НДС конструкций. Эти изменения по-разному влияют на прочность конструкции [61]. Работу В. Ольшака [153], опубликованную в тридцатых годах двадцатого столетия, относят к первым работам по учёту неоднородности материала. Показано, что физические постоянные материала, зависящие от температуры являются функциями инвариантов тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций. В работе обращено внимание на научное, практическое значение учёта неоднородности материалов, и приводится ряд решений для осесимметричных задач.

В работах И.Г. Овчинникова [151], И.И. Овчинникова [152], В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева [155], Н.Ф. Синева [182] и др. излагается расчёт НДС и долговечность конструкций, работающих в агрессивных средах.

Алгоритм расчёта, позволяющий одновременно учесть физическую и геометрическую нелинейности и изменение механических свойств материала от температурного воздействия, представлен в работах [197, 228].

Изучению влияния радиоактивных излучений различного типа на механические свойства материалов элементов конструкций посвящены работы В.И. Андреева [8], Д.В. Бабица [17], О.В. Бирюкова [25], В.С. Бондарь [28], В.Н. Киселевского [98], В. Ольшака [153], В.Л. Пахомова [154], С.М. Школьного [207] и др.

Исследованию НДС физически неоднородных конструкций посвящены работы Б.Я. Кантора [90], И.Т. Комозина, И.Н. Преображенского [105], С.А. Кузнецова, О.В. Старожиловой [113], О.Г. Кумпяка [115], Ю. Р. Лепика [119], Т.Т. Мусабаева, Т.К. Каюнова, Р.С. Санжаровского [146, 177, 235], Ю.В. Немировского, А.П. Янковского [150], В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева [155], А. И. Стрельбицкой, В.А. Колгадина, С.И. Матошко [183, 184] и др.

Вариационный метод решения физически и геометрически нелинейных задач теории неоднородных пологих оболочек изложен Б.Я. Кантором в работе [90]. Исследовано влияние пластической неоднородности, вызванной термообработкой, поверхностным наклепом и облучением.

И.Т. Комозин, И.Н. Преображенский [105] рассмотрели НДС неоднородных физически и геометрически нелинейных пологих оболочек с учётом поперечного сдвига, полагая, что толщина оболочки есть плавная функция. Связь между напряжениями и деформациями записывается в виде функции, учитывающей физические параметры, связанные с деформируемым состоянием в рассматриваемой точке.

Проведены и проанализированы результаты расчёта изгиба свободно опертой оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с учётом геометрической нелинейности и разномодульности. Показано, что разномодульность существенно влияет на напряжения (расхождение результатов до 50 %).

С.А. Кузнецов, О.В. Старожилова [113] рассмотрели НДС прямоугольных в плане неоднородных, однослойных и многослойных пластин и оболочек переменной толщины и кривизны, находящиеся под действием распределённой по поверхности нагрузки. Физические характеристики материала являются функциями координат. Граничные условия оболочки: жесткое защемление и шарнирное опирание. Решение системы уравнений равновесия оболочек в перемещениях проводится с использованием вариационного принципа Лагранжа. Учитывается физическая и геометрическая нелинейности. Для линеаризации задачи используется МППУ И.А. Биргера.

А. И. Стрельбицкая, В.А. Колгадин, С.И. Матошко [183] исследовали НДС прямоугольных пластин из неоднородного материала при изгибе. Учитывалось изменение модуля упругости и предела текучести по толщине сечения. Пластины находились под действием равномерно распределенной нагрузки. Задача реализуется вариационным методом Ритца, методом упругих решений и методом конечных разностей (МКР). Условие пластичности принято по Мизесу [85]. Рассмотрены различные виды опирания пластин.

Ю. Р. Лепик [119] рассмотрел предельное равновесие круглых неоднородных жёстко-пластических пластинок. Предел текучести материала менялся в каждой точке пластины. Материал подчиняется условию текучести Треска-Сен-Венана.

Ю.В. Немировским, А.П. Янковским [150] представлен расчёт упруго-пластического деформирования гибких пластин со сложными структурами армирования. Отмечено, что наступление предельного состояния хотя бы одного из фазовых материалов приводит к значительным пластическим деформациям. Точный расчёт таких конструкций должен основываться на соотношениях геометрически нелинейной (ГН) теории деформирования пластин и оболочек.

Работы В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева [155, 157] посвящены исследованию НДС пластин и оболочек, находящихся в агрессивной среде. Проведены исследования на прочность, устойчивость и долговечность тонкостенных конструкций, выполненных из нелинейно-деформируемого материала. Учитывалась неоднородность физико-механических свойств, возникающая в процессе их эксплуатации. Дана оценка изменения характеристик НДС рассматриваемых конструкций от влияния агрессивных воздействий, основанная на математическом моделировании и численном эксперименте.

Воздействие высоких температур влияет на НДС конструкции и механические характеристики материала. В работах В.В. Гнатюка, В.В. Улитина [50], В.А. Заруцкого [79], В.В. Кабанова [87], В.В. Карпова, В.Н. Филатова [95, 96], М.О. Моисеенко, О.Н. Попова, Т.А. Трепутневой [139, 141, 197], Я.С. Подстригача [170], В.М. Рассудова [175] и др. представлены исследования температурных напряжений и устойчивости тонкостенных ребристых пластин и оболочек. Большая часть задач решены в линейной постановке. Не учитывалось изменение модуля упругости и коэффициента теплового расширения материала от температуры. Изменение температурного поля по толщине пластины рассматривалось как линейное.

Изменение физико-механических свойств материала от температуры учитывались в работах Н.И. Безухова [21], И.И. Гольденблатта, Н.А. Николаенко [54], Б.Л. Кантора, Л.М. Афанасьевой [91], В.В. Карпова, В.Н. Филатова [95], В.А. Крысько, П.Б. Федорова [110], П.К. Семёнова [180], S. Alexandrov, N. Alexandrova [214] и других.

Термоупругость тел неоднородной структуры рассмотрена в работах В.А. Баженова, Н.А. Соловей [19], В.А. Бородина, А.И. Рязанова [30], Я.С. Подстригача [170], С.М. Школьного [207], M. Khaing, A.V. Tkacheva [225] и других.

1.5. Выводы по первой главе

Анализ работ, посвященных расчёту подкреплённых элементов конструкций, имеющих начальный прогиб, позволяет сделать следующие выводы:

1. Исследование деформированного состояния подкреплённых пологих оболочек и пластин с начальными прогибами при воздействии силовой нагрузки с учётом термозависимости свойств материала, физической и геометрической нелинейностей, изучено недостаточно. Необходимы дальнейшие исследования.

В связи с этим, задача по разработке методов и алгоритмов расчёта подкреплённых элементов конструкций в упругопластической стадии с учётом физической и геометрической нелинейностей, начального прогиба, разномодульности, обусловленной температурными воздействиями, является актуальной и имеет большое теоретическое и практическое значения.

2. На основании проведённого анализа поставлена задача последующих исследований: проанализировать существующие методы по определению напряжённо-деформированного состояния нагруженных подкреплённых пластин, пологих оболочек и систем из них с малыми начальными прогибами срединной поверхности и неоднородных свойств материала, вызванных температурным воздействием с учётом физической и геометрической нелинейностей и разработать метод, позволяющий одновременно учитывать все вышеперечисленные особенности.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ПОДКРЕПЛЁННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ, НАЧАЛЬНЫХ ПРОГИБОВ И СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

2.1. Теории деформирования элементов конструкций, материал которых зависит от вида напряжённого состояния

В данном параграфе описаны подходы к описанию поведения нелинейно-упругих изотропных материалов, зависящих от вида напряжённого состояния.

Вариант разномодульной теории упругости, предложенный Р.Е. Мкртчяном в работе [136], основан на соотношениях нелинейной теории упругости, в которой строится функция энергии деформации с различными жёсткостями при растяжении и сжатии. При растяжении по всем трём главным направлениям потенциал считается функцией трёх независимых инвариантов.

Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников [132] в качестве параметра, характеризующего вид напряжённого состояния, выбирают параметр φ - угол вида напряженного состояния или фаза, зависящий от третьего инварианта девиатора напряжений, введённого в виде $\cos 3\varphi$ (2.1):

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\tau^3} \left(\det \|\sigma_{ij}\| - \sigma_{cp}^3 + \frac{3}{2} \tau^2 \sigma_{cp} \right). \quad (2.1)$$

Упругий потенциал записывается в виде:

$$\Phi = 0.5(A_1 \sigma_{cp} + A_2 \tau), \quad (2.2)$$

где A_1, A_2 – параметры, зависящие от угла φ ; σ_{cp} – среднее напряжение; τ – октаэдрическое касательное напряжение.

Два варианта записи упругого потенциала, учитывающего разномодульность, предложены Л.А. Толоконниковым [195]. Важная роль отводится фазовому инварианту деформированного состояния. В первом варианте упругий потенциал имеет вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + 3G(1 - m \cos 3\beta). \quad (2.3)$$

Изменение объёма θ и коэффициент m – есть функции только среднего напряжения σ_{cp} . Главные направления тензоров напряжений и деформаций совпадают. Во втором варианте упругого потенциала дополнительно учитывается влияние процессов изменения объёма и формы, и потому изменение объёма θ является функцией σ_{cp} только при отсутствии формоизменения.

Потенциал имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + 3G(1 - m \cos 3\beta) f^2 - 3\sqrt{2}\Lambda(1 - m \cos 3\beta)\theta f, \quad (2.4)$$

где K , G , m , Λ – константы, определяемые опытным путём. Ограничения этих моделей – равенство модулей объёмного расширения и сжатия.

Модель разномодульного материала, близкую к модели, представленной в работе Л.А. Толоконникова, предложили Н.Г. Тамуров и Г.В. Туровцев [188]. Она отличается простотой и зависит от знака среднего напряжения.

При построении определяющих соотношений для изотропного разномодульного тела Е.В. Ломакин [123] предположил, что характеристики упругости зависят от знаков и величин трёх главных напряжений. В качестве параметра, характеризующего вид напряжённого состояния, выбрано отношение среднего напряжения к интенсивности напряжений.

НДС тонких пологих оболочек положительной гауссовой кривизны за пределом упругости исследуется в работе [200] А.А. Трещевым, А.Н. Забелиным. Авторами выведены дифференциальные уравнения, описывающие деформированное состояние оболочки за пределом упругости. В работе представлены результаты решения полученных дифференциальных уравнений, а также приведены зоны пластичности при разных нагрузках для различных условий пластичности.

Обобщая известные модели, В.В. Петров, И.Г. Овчинников, В.К. Иноземцев [155] предложили модель, описывающую поведение нелинейно-упругого материала, чувствительного к виду напряжённого состояния. Она позволяет более полно представить реальные свойства материала. Соотношения, связывающие напряжения и деформации в случае плоского напряжённого со-

СТОЯНИЯ ИМЕЮТ ВИД:

$$\begin{cases} e_x = \frac{1}{\Psi_{j1}} \sigma_x - \frac{\mu_{j2}}{\Psi_{j2}} \sigma_y; & e_y = \frac{1}{\Psi_{j2}} \sigma_y - \frac{\mu_{j1}}{\Psi_{j1}} \sigma_x; \\ e_z = -\frac{\mu_{j1}}{\Psi_{j1}} \sigma_x - \frac{\mu_{j2}}{\Psi_{j2}} \sigma_y; & e_{xy} = \frac{1}{G_j} \tau_{xy}. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\text{Здесь} \quad \frac{1}{G_j} = 2 \left[\left(\frac{1}{\Psi_{j1}} + \frac{\mu_j}{\Psi_{j1}} \right) \frac{\sigma_x}{\sigma_x - \sigma_y} - \left(\frac{1 + \mu_{j2}}{\Psi_{j2}} \right) \frac{\sigma_x}{\sigma_x - \sigma_y} \right]; \quad (2.6)$$

$j1=1;2; \quad j2=1;2; \quad \Psi_j = \left(\frac{\sigma_i}{e_i} \right)_j; \quad j = j1; j2; \quad \text{причём } j=1 \text{ при } j1=1; j2=2 \text{ и}$

$j=2 \text{ при } j1=2; j2=1.$ Зависимость « $\sigma_i - e_i$ » представлена функциями, аппроксимирующими диаграммы деформирования при одноосном растяжении ($j=1$) и сжатии ($j=2$); m_j – коэффициент поперечной деформации, характеризующий поперечное сжатие при растяжении ($j=1$) и поперечное расширение при сжатии ($j=2$); G_j – модуль сдвига, определяемый через Ψ_j и m_j .

Дальнейшее развитие теории по определению НДС материала элементов конструкции, чувствительного к виду напряжённого состояния, идёт по пути разделения полученных теорий в зависимости от вида материала.

2.2. Методы решения задач с учётом неоднородности при совместном учёте физической и геометрической нелинейностей

Необходимость учёта в расчётах физической и геометрической нелинейностей является основной причиной появления нелинейных зависимостей в основных уравнениях строительной механики [160].

В теории ребристых оболочек нелинейные уравнения решаются приближенными методами. Из них отметим вариационные методы, которые приводят к системе нелинейных алгебраических уравнений. Порядок системы уравнений определяется числом варьируемых параметров в искомых функциях. В отличие от линейных задач в данном случае большую роль играет удачный выбор аппроксимирующих функций.

Стремление обойти трудности решения нелинейных уравнений привело к созданию методов линеаризации нелинейных задач: метод последовательных приближений, метод переменных параметров упругости, метод последовательных нагружений и другие.

Ниже кратко изложены итерационные методы решения нелинейных задач.

2.2.1. Метод последовательных приближений

Успешное решение нелинейных задач достигается линеаризацией основных исходных соотношений с использованием метода последовательных приближений, который хорошо себя зарекомендовал при решении нелинейных задач [24, 85].

Проиллюстрируем метод последовательных приближений на примере решения геометрически нелинейных задач по определению напряжённо-деформированного состояния пластин и оболочек.

Уравнения, связывающие деформации и перемещения по теории Т. Кармана [224] с учётом итераций с номером $n + 1$, записываются в виде:

$$\begin{aligned} e_x^{n+1} &= \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} - k_x W^{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^n}{\partial x} \right)^2, \quad x \leftrightarrow y, \\ e_{xy}^{n+1} &= \frac{\partial U^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial W^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial W^{n+1}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя (2.7) относительно перемещений $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}$ и принимая для всех остальных величин, входящих в статические и физические уравнения, индекс $n + 1$, записывается разрешающая система уравнений.

Метод последовательных приближений используется и для решения физически нелинейных задач [16, 106, 123]. Физические уравнения деформационной теории пластичности записываются в виде:

$$\sigma_x = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(e_x + \frac{1}{2} e_y \right); \quad \sigma_y = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(e_y + \frac{1}{2} e_x \right); \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy}. \quad (2.8)$$

При этом статические и геометрические уравнения остаются линейными. Записав в этих уравнениях все величины с индексом $n + 1$, получим разрешаю-

щие уравнения в виде рекуррентных зависимостей.

На каждой итерации рассчитываются линейно-упругие элементы с дополнительной нагрузкой. Итерации заканчиваются, как только разница между приближениями окажется в пределах заданной погрешности вычислений.

В методе последовательных приближений в левой части уравнения оставляют оператор, решение которого не представляет особого труда, остальные члены переносят в правую часть. Задавшись первым приближением перемещений, подставляют его в правую часть, интегрируют уравнение и находят второе приближение. Приближения повторяются до тех пор, пока погрешность результатов не станет меньше допустимой.

2.2.2. Метод переменных параметров упругости

Метод переменных параметров упругости был предложен И.А. Биргером. В основе метода лежит линеаризация уравнений, выражающих деформационные свойства материала, зависящие от вида напряжённого состояния.

Уравнения деформационной теории пластичности представляются в форме соотношений Гука [23]:

$$e_{ij} = \frac{1}{E^*} \left[(1 + \mu^*) \sigma_{ij} - 3\mu^* \delta_{ij} \sigma_{cp} \right] + \delta_{ij} \alpha T^0, \quad (2.9)$$

где e_{ij}, σ_{ij} – единичные тензоры деформаций и напряжений; δ_{ij} – единичный тензор, σ_{cp} – среднее напряжение, αT^0 – температурная деформация. Параметры упругости

$$E^* = E \frac{3}{2(1 + \mu)\psi + 1 - 2\mu}, \quad \mu^* = \frac{\psi(1 + \mu) - (1 - 2\mu)}{2\psi(1 + \mu) + (1 - 2\mu)} \quad (2.10)$$

зависят от модуля упругости E , коэффициента Пуассона μ , параметра пластичности $\psi = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{e_i}{\sigma_i}$.

Решение задачи реализуется итерационным путём. При этом уравнения деформационной теории пластичности представляются как уравнения теории

упругости. Модуль упругости в них заменяется секущим модулем E_c .

Применение метода переменных параметров упругости при расчёте пластин и оболочек с учётом разномодульности материала представлено в работах [23, 56, 57].

2.2.3. Метод Ньютона-Канторовича

Метод Ньютона-Канторовича для оболочек описан в работе [149]. Зависимости между деформациями и напряжениями записываются в виде:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{9K}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_c}(\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y), \quad x \leftrightarrow y, \\ e_z &= -\frac{9K - 2E_c}{9K + 4E_c}(e_x + e_y). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соотношения относительно напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n+1)} &= a_{11}^{(n)} e_x^{(n+1)} + a_{12}^{(n)} e_y^{(n+1)} + \sigma_x^{(n)} - a_{11}^{(n)} e_x^{(n)} - a_{12}^{(n)} e_y^{(n)}, \\ \sigma_y^{(n+1)} &= a_{22}^{(n)} e_y^{(n+1)} + a_{21}^{(n)} e_x^{(n+1)} + \sigma_y^{(n)} - a_{22}^{(n)} e_y^{(n)} - a_{21}^{(n)} e_x^{(n)}, \\ \tau_{xy}^{(n+1)} &= \frac{E}{2(1+\mu)} e_{xy}^{(n+1)} + a_{33}^{(n)} e_{xy}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{где} \quad \begin{cases} a_{11}^{(n)} = \frac{c_{22}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}; a_{22}^{(n)} = \frac{c_{11}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}; a_{12}^{(n)} = -\frac{c_{12}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}; a_{21}^{(n)} = -\frac{c_{21}^{(n)}}{\Delta^{(n)}}, \\ a_{33}^{(n)} = \frac{E_c^{(n)}}{3} - \frac{E}{2(1+\mu)}, \Delta^{(n)} = c_{11}^{(n)} c_{22}^{(n)} - c_{12}^{(n)} c_{21}^{(n)}, \end{cases} \quad (2.13)$$

c_{ij} – коэффициенты, характеризующие пластические деформации,

$$\begin{aligned} c_{11}^n &= \frac{1}{9K} + \frac{1}{E_C^n} + \left(\frac{1}{E_K^n} - \frac{1}{E_C^n} \right) \left(\frac{s_{11}^n}{\sigma_i^n} \right)^2, \quad 1 \leftrightarrow 2, \\ c_{12}^n &= c_{21}^n = \frac{1}{9K} + \frac{1}{2E_C^n} + \left(\frac{1}{E_K^n} - \frac{1}{E_C^n} \right) \frac{s_{11}^n s_{22}^n}{\sigma_i^n}, \\ E_C^n &= \frac{\sigma_i(e_i^n)}{e_i^n}, \quad E_K^n = \frac{d\sigma_i(e_i^n)}{de_i^n}, \quad \alpha^n = \frac{2}{9} \frac{E_C^n}{K}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом вводится не только секущий модуль упругости E_c , но и касательный E_k .

Итерационные соотношения

$$\begin{aligned} e_x^{n+1} &= e_x^n + c_{11}^n (\sigma_x^{n+1} - \sigma_x^n) + c_{12}^n (\sigma_y^{n+1} - \sigma_y^n), \quad x \leftrightarrow y, \\ e_z^{n+1} &= -\frac{1 - \alpha^n}{1 + 2\alpha^n} (e_x^{n+1} + e_y^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Итерационный процесс заканчивается, когда расхождение приближений оказываются меньше заданного значения погрешности.

2.2.4. Метод последовательных нагружений

Своеобразной модификацией метод последовательных приближений является метод последовательных нагружений, получивший наибольшее применение, и развитый В.В. Петровым [156]. Достоинством этого метода является его наглядность, простота и возможность на каждом этапе нагружений учитывать изменение граничных условий, жесткости и характеристик материала оболочки.

Метод сводит решение нелинейной задачи к решению последовательно-линейных задач. В характерной точке определяется критическая нагрузка, соответствующая максимуму на построенной кривой «нагрузка – прогиб».

Применение и развитие метода представлено на примере расчёта жёсткой нелинейно-упругой пластинки [160]. Уравнение равновесия имеет вид:

$$D\nabla^4 W + 2L_1(D, \nabla^2 W) + \nabla^2 D \nabla^2 W - \frac{1}{2} L(D, W) = \frac{3}{4} q, \quad (2.16)$$

где
$$L_1(D, \nabla^2 W) = \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 W)}{\partial y},$$

$$L_1(D, W) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (2.17)$$

Линеаризованное уравнение на n -м этапе нагружения имеет вид:

$$D_1 \nabla^4 w_n - A_x \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - A_y \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - A_{xy} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} - B_x \frac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} - B_y \frac{\partial^3 w_n}{\partial y^3} - R_y \frac{\partial^4 w_n}{\partial x \partial y^3} -$$

$$-C_x \frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y} - C_y \frac{\partial^3 w_n}{\partial y^2 \partial x} - D_x \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} - D_y \frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4} - D_{xy} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^2 \partial y^2} - R_x \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^3 \partial y} = \frac{3}{4} q_n. \quad (2.18)$$

Здесь $w_n(x, y)$ – приращение прогиба $W(x, y)$; $q_n(x, y)$ – приращение нагрузки $q(x, y)$; $A_x, A_y, \dots, R_y$ – переменные коэффициенты, зависящие от прогиба W .

На n -м этапе нагружения

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} w_i(x, y); \quad q(x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} q_i(x, y). \quad (2.19)$$

Считается, что на каждом этапе нагружения материал пластинки имеет разные физические свойства по толщине.

Для устранения накапливаемой погрешности на каждом шаге нагружения организуется ряд пересчетов и уменьшается шаг нагружения.

Для нелинейно-деформируемого материала физические уравнения можно выразить через константы Ляме [124] в приращениях, представленные в работе В.В. Петрова [155]:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x &= (\lambda_c \Delta \theta + 2\mu_c \Delta e_x) + (\Delta \lambda_c \theta + 2\Delta \mu_c e_x), \\ \Delta \tau_{xy} &= \mu_c \Delta \gamma_{xy} + \Delta \mu_c \gamma_{xy}, \quad x \rightarrow y \rightarrow z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{E_c \mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}, \quad G_c = \frac{E_c}{2(1 + \mu)}, \quad E_c = \frac{\sigma_i}{e_i}, \\ \mu &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_c}{E} (1 - 2\mu_0), \quad \theta = e_x + e_y + e_z. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Величины θ, e_x, e_y, e_z соответствуют невозмущенному состоянию.

$$\Delta \lambda_c = \frac{d\lambda_c}{dE_c} \Delta E_c = \frac{1}{2(1 + \mu)^2} \Delta E_c, \quad \Delta \mu_c = \frac{d\mu_c}{dE_c} \Delta E_c = \frac{3}{4(1 + \mu)^2} \Delta E_c, \quad (2.22)$$

рассматриваются, как возмущения параметров λ_c, μ_c , вызывающие приращения деформаций. Секущий модуль E_c есть функция интенсивности деформаций e_i и функции $B(x, y, z)$ ответственной за его изменение за счет взаимодействия с агрессивной средой

$$\Delta E_c = \frac{\partial E_c}{\partial e_i} \Delta e_i + \frac{\partial E_c}{\partial B} \Delta B = (E_k - E_c) \frac{\Delta e_i}{e_i} + \frac{\partial E_c}{\partial B} \Delta B, \quad (2.23)$$

где $E_k = d\sigma_i/de_i$ – касательный модуль упругости.

С учётом преобразований инкрементальные уравнения в случае плоского напряжённого состояния $\sigma_z = \Delta\sigma_z = 0$ [159] имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_x &= \frac{E_k}{1-\mu^2}(\Delta e_x + \mu\Delta e_y) + \frac{2-\mu}{2(1+\mu)^2(1-\mu)}\left(e_x - \frac{1-2\mu}{2-\mu}e_y\right)\frac{\partial E_c}{\partial B}\Delta B, \quad x \leftrightarrow y; \\ \Delta\tau_{xy} &= \frac{E_k}{2(1+\mu)}\Delta\gamma_{xy} + \frac{3}{4(1+\mu)^2}\gamma_{xy}\frac{\partial E_c}{\partial B}\Delta B.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Для проведения вычислений необходимо иметь аналитическую зависимость « $\sigma_i - e_i$ », которую необходимо пересчитать в координатах « $E_c - e_i$ » и отобразить аналитическим выражением. Кроме того зависимости « $\sigma_i - e_i$ », полученные при различных значениях параметра B , необходимо пересчитать в координатах « $E_c - B(x, y, z)$ ». Приращение параметра развивающейся неоднородности ищется в виде $\Delta B = \frac{\partial B}{\partial t}\Delta t$. В этом случае прослеживается изменение напряжённо-деформированного состояния с учётом неоднородности материала, развивающейся во времени.

2.3. Методы расчёта пластин и пологих оболочек и конструкций из них

Критерии, характеризующие гибкость пластин и оболочек, представлены в работах В.А. Крысько [109], П.А. Лукаша [124]. Гибкие пластины и оболочки занимают промежуточное положение между жёсткими оболочками и мембранами [159].

В развитие методов решения нелинейной теории оболочек и пластин выдающийся вклад внесли известные отечественные ученые: Н.П. Абовский, С.А. Амбарцумян, И.Г. Бубнов, В.В. Болотин, Д.В. Вайнберг, Н.В. Валишвили, В.З. Власов, А.С. Вольмир, И.А. Ворович, Б.Г. Галёркин, К.И. Галимов, Э.И. Григолюк, А.Н. Гузь, А.А. Ильюшин, Б.Я. Кантор, В.В. Карпов, М.С. Корнишин, В.А. Крысько, П.А. Лукаш, А.И. Лурье, И.Е. Милейковский, Х.М. Муштари, Ю.В. Немировский, П.М. Огибалов, В.В. Петров, В.А. Постнов, А.Н. Потапов, Г.А. Тетерс, С.П. Тимошенко, Д.И. Шилькрут, а также зарубежные авторы: L.H. Donnell, Ph. G. Hodge, H.G. Hopkins, W. Ol-szak, E. Reissner, A. Sawczuk и другие.

Ниже кратко рассмотрены основные методы расчёта, применяемые при расчёте гибких оболочек и пластин.

2.3.1. Вариационные методы

Задача сводится к решению дифференциальных уравнений или поиску минимума многопараметрической функции энергии [169, 182].

Функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, заменяют приближённым аналитическим выражением, наилучшим образом аппроксимирующим эту функцию [135]. Функции перемещений выбирают в виде ряда с конечным числом членов линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям, и варьируемыми параметрами подлежащими определению.

Метод Ритца основан на использовании вариационного принципа возможных перемещений (принципа Лагранжа). Решение сводится к нахождению минимума потенциальной энергии деформации тела. Вариационное уравнение включает в себе дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия. При использовании данного метода, координатные функции обязательно должны удовлетворять геометрическим граничным условиям, а статические граничные условия удовлетворяются автоматически.

На использовании принципа возможных перемещений основан обобщённый метод Бубнова-Галёркина. Он особенно эффективен, если уже известны дифференциальные уравнения равновесия и силовые краевые условия в компонентах перемещений [170].

Метод Власова-Канторовича позволяет понизить размерность краевой задачи. Функция поперечного распределения выбирается заранее, а функция, называемая обобщённым перемещением, имеет искомые коэффициенты разложения [37]. Ограничением метода является неравномерность координатных направлений, следствием чего является неодинаковая точность результатов вдоль разных координат.

Модификацией метода Власова-Канторовича, сохраняющей все его преимущества и свободной от ряда ограничений, является метод вариационных итераций [77]. Искомые функции по методу Власова-Канторовича представляются в виде рядов функций с разделёнными переменными. Система

функций одного направления предполагается аппроксимирующей, а система функции другого направления определяется из решения вариационных уравнений. На второй итерации система функций второго направления, определенная после первой итерации, предполагается аппроксимирующей, а система функций первого направления определяется из решения вариационных уравнений. Итерационный процесс продолжается до его сходимости с требуемой точностью.

2.3.2. Метод конечных разностей и вариационно-разностный метод

Метод конечных разностей применяется для численного решения нелинейных дифференциальных уравнений. Приближённое решение краевой задачи основано на замене дифференциальных уравнений конечно-разностными уравнениями. Получается система алгебраических уравнений с искомыми величинами перемещений в узлах сетки.

Метод имеет ряд недостатков: неудобство исследования оболочек переменной толщины ввиду значительного усложнения дифференциальных уравнений; значительные трудности в составлении конечно-разностных уравнений, если сетка нерегулярна; приближённый учёт граничных условий.

В развитие вариационно-разностного метода (ВРМ) при расчёте оболочек с разрывными параметрами большой вклад внесён Н.П. Абовским [1, 2], Д.В. Вайнбергом [34], А.И. Демидовым [67], Л.В. Енджиевским [74] и другими. В вариационно-разностном методе разрешающие уравнения получают из условия стационарности энергетического функционала полной потенциальной энергии системы. Метод не требует явной формулировки естественных граничных условий, поэтому он нашёл широкое применение при решении задач изгиба оболочек с разрывными параметрами [10, 20, 35, 67, 74].

При расчёте оболочек используется регулярная сетка. Круг рассматриваемых задач ограничивается, так как с помощью такой сетки нельзя достаточно точно описать разнообразные контурные условия.

2.3.3. Метод конечных элементов

Достоинством метода конечных элементов является возможностью дать конкретный и ясный физический смысл вычисляемым результатам. Это один из распространённых методов решения задач механики деформируемого твёрдого тела.

Алгоритм расчёта методом конечных элементов состоит в следующем:

- конструкция идеализируется конечными элементами, образующими сетку;
- выбираются координатные функции, аппроксимирующие перемещения в узлах сетки;
- в узлах сетки определяются перемещения, деформации, внутренние усилия (напряжения).

Распространённой является такая форма метода конечных элементов, в которой неизвестными являются обобщённые узловые перемещения. Разрешающая система уравнений получается при использовании принципа возможных перемещений.

Большой вклад в развитие метода конечных элементов внесли: А.В. Александров, З.И. Бурман, Д.В. Вайнберг, К.П. Горбачёв, В.Г. Корнеев, А.М. Масленников, В.А. Постнов, Л.А. Розин, Н.Н. Шапошников, О. Зенкевич, Р. Клаф, Р. Мелош, Е.С. Пржеменицкий и многие другие.

Главное достоинство метода конечных элементов – возможность использования на его основе стандартных универсальных программных комплексов.

К недостаткам метода следует отнести большую подготовительную работу и потерю точности решения в точках, расположенных на границах отверстий и утолщений.

2.3.4. Расчёт конструкций, состоящих из оболочек и пластин

Для расчёта конструкций, состоящих из подкреплённых оболочек и пластин, а также систем из них разработаны многоуровневые подходы: метод суперэлементов, метод редуцированных элементов, метод модуль элементов,

в которых исследуется исходная конструкция, состоящая из нескольких укрупнённых частей, обладающих меньшим, чем в методе конечных элементов, количеством степеней свободы. Число варьируемых параметров при этом уменьшается [78, 205].

В работе Б.Я. Кантора, С.Н. Каторжного [90] описывается вариационно-сегментный метод исследования оболочек. Искомые функции на смежных сегментах зависят от переменных в местах стыковки и вариационных уравнений. Применяется процедура Ритца в высоких приближениях.

Преимущества вариационных методов при решении нелинейных задач теории оболочек состоят в том, что они приводят к небольшим системам алгебраических уравнений с положительно определённой матрицей. При этом в отличие от методов, связанных с решением дифференциальных уравнений, требуется лишь численное интегрирование характеристик жесткости по области, что способствует увеличению точности решения.

В работе В.Н. Завьялова [78] расчёт гибких пластинчато-стержневых систем проводится методом Ритца с укрупнёнными элементами (пластинами и рёбрами) по расчётной схеме метода перемещений. В развитии подхода В.Н. Завьялова, О.Н. Попов [168] рассмотрел систему подкреплённых пластин и оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей. В работе М.О. Моисеенко [143] рассмотрены материалы, чувствительные к виду напряжённого состояния.

2.4. Поиск варьируемых параметров функций перемещений

Поиск варьируемых параметров методом Ритца состоит в отыскании минимума энергии. Это можно осуществить, решив составленную систему алгебраических уравнений [135] или воспользовавшись процедурой прямого поиска [15]. Второй подход, позволяющий воспользоваться стандартными алгоритмами [162] применяется в данной работе.

При решении задачи поисковыми методами используется идея спуска из некоторой допустимой точки x^0 . Из точки x^0 производится спуск в окрестность экстремума, причём различные методы применяют разные траектории спуска [162].

Наиболее простым из применяемых методов является метод покоординатного спуска (МПС). Он позволяет достаточно быстро достичь области постоянной кривизны целевой функции. Но в ряде случаев возникает проблема с достижением точки экстремума. Метод сопряжённых градиентов (МСГ) с успехом применяется для минимизации разных функций, в том числе и не квадратичных. Основной трудностью при использовании метода сопряжённых градиентов является его зависимость от выбора масштаба оптимизируемых переменных. Если гиперпространство параметров проектирования вытянуто, метод сопряжённых градиентов сходится медленно. Одним из выходов в этой ситуации является использование информации, даваемой вторыми частными производными целевой функции. Но при этом теряется одно из основных преимуществ метода сопряжённых градиентов. Другим подходом является изменение масштаба независимых переменных в целевой функции. С изменением масштаба переменных (координат) меняется и направление спуска, что влияет на эффективность метода сопряжённых градиентов. В этом случае применяется покоординатный скорейший спуск, в процессе которого вычисляются масштабные множители.

Целесообразным является комбинация покоординатного спуска и метода сопряжённых градиентов. Первый является вспомогательным для более точного второго метода.

2.5. Выводы по второй главе

На основании анализа существующих методов определения НДС подкреплённых пластин и пологих оболочек с начальным прогибом с одновременным учётом физической, геометрической нелинейностей и изменения механических свойств материала от температуры, для решения поставленных в данной диссертационной работе задач были приняты:

1. Модель нелинейно-упругого разномодульного материала, зависящая от вида напряжённого состояния, предложенная в работе В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева [155], которая позволяет учитывать физическую нелинейность и изменение свойств материала, вызванных температурным воздействием.

2. Для линеаризации исходных соотношений расчёта применяется метод переменных параметров упругости И.А. Биргера [23], обладающий хорошей сходимостью и позволяющий учитывать неоднородные свойства материала.

3. Используется вариационный метод Ритца, основанный на принципе возможных перемещений и позволяющий минимизировать функционал Лагранжа по варьируемым параметрам [135]. При этом координатные функции обязательно должны удовлетворять геометрическим граничным условиям, а статические граничные условия удовлетворяются автоматически, что упрощает решение задач с разрывными параметрами.

4. Для численных расчётов в данной диссертационной работе применяется стандартная программа минимизации функции многих переменных [162]. В ней реализуется комбинация метода покоординатного спуска с квадратичной аппроксимацией по каждой переменной и метода сопряжённых градиентов с преобразованием координат, используя их на разных ступенях минимизации и учитывая информацию о поведении функции, которую может дать каждый метод.

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ МЕТОДА РАСЧЁТА ПОДКРЕПЛЁННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК И КОНСТРУКЦИЙ ИЗ НИХ С НАЧАЛЬНЫМ ПРОГИБОМ И ОДНОВРЕМЕННЫМ УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

3.1. Постановка задачи и расчётная схема конструкции

В работе рассматривается подкреплённая конструкция, состоящая из гибких пластин и пологих оболочек с начальными прогибами и находящаяся под действием поперечной нагрузки. Учитывается геометрическая и физическая нелинейности. При температурном воздействии изменение характеристик материала учитывается по полю и по толщине конструкции. На рис. 3.1 приведена расчётная схема конструкции.

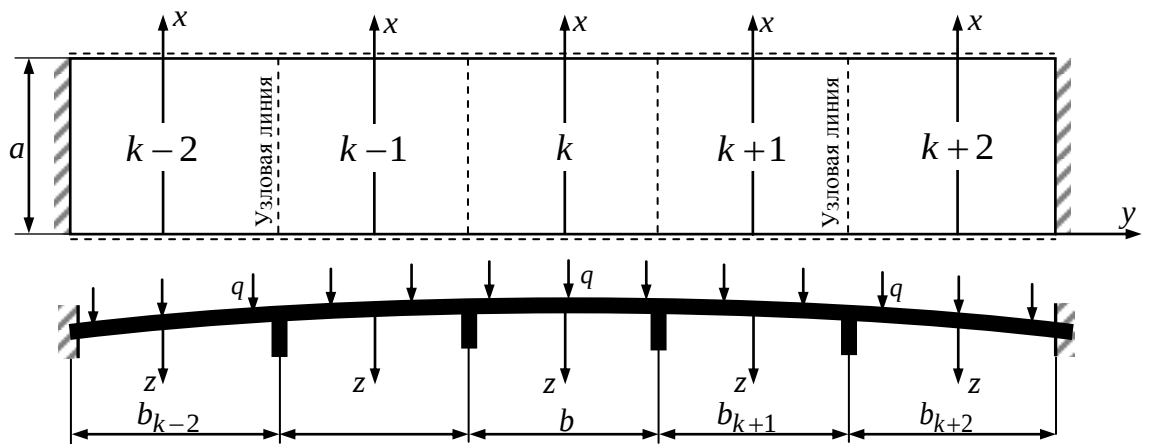


Рис. 3.1. Схема подкреплённой полой оболочкой

Оси локальной криволинейной системы координат x , y направлены по линиям главных кривизн и совмещены со срединной поверхностью полой оболочки. $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ (k_1, k_2 – главные кривизны оболочки вдоль осей x , y ; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизн срединной поверхности оболочки вдоль осей x , y). Ось z направлена в сторону вогнутости (рис. 3.1). Граничные условия в продольном направлении постоянны. Если координатная поверхность представляет собой плоскость, то получаем пластину, для которой $k_1 = k_2 = 0$.

Модель рассматриваемой конструкции представим как сплошную деформируемую систему с подкрепляющими рёбрами, наличие которых вызывает изменение жёсткости.

Высоту и местоположение рёбер зададим с помощью разрывных функций, характеризующих распределение рёбер по оболочке и их высоту [94, 120]:

$$h(x, y) = h_0(x, y) \cdot \left[1 + \sum_{i=1}^j \alpha_i [\Gamma_0(x - a_{1i}) - \Gamma_0(x - a_{2i})] \cdot [\Gamma_0(y - b_{1i}) - \Gamma_0(y - b_{2i})] \right].$$

Здесь $\Gamma_0(x - a_{1i}), \Gamma_0(x - a_{2i}), \Gamma_0(y - b_{1i}), \Gamma_0(y - b_{2i})$ – единичные столбчатые функции; a_{1i}, a_{2i} – координаты вершин i -ой области ступенчатого изменения жёсткости в направлении оси x ; b_{1i}, b_{2i} – координаты вершин i -ой области ступенчатого изменения жёсткости в направлении оси y ; $\alpha_i = \frac{h_i(x, y) - h_0(x, y)}{h_0(x, y)}$; $h_i(x, y)$ – толщина i -ой ступени оболочки; $h_0(x, y)$ – толщина оболочки в начале координат.

Взаимодействие панели и ребра связано через искомые перемещения узловых линий [3].

Материал конструкции нелинейно-упругий, а при отсутствии разгрузки упругопластический, поэтому характеристики материала являются однозначными функциями деформаций. В работе приняты теория гибких пластин и оболочек [39] и теория малых упругопластических деформаций [85].

При определении поперечной деформации будем считать, что каждый слой пластинки (параллельный срединной поверхности) работает в условиях плоского обобщенного напряженного состояния. Нормальные к срединной поверхности напряжения пластин и оболочек равны нулю [124].

Конструкция подвергается температурному воздействию и поперечной нагрузке, рассматривается простое нагружение.

3.2. Зависимости, характеризующие напряжённо-деформированное состояние элементов конструкции

Физическая нелинейность учитывается по деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина [85]. В основе теории заложены следующие гипотезы:

1. Среднее напряжение σ_{cp} пропорционально объёмной деформации Θ :

$$\sigma_{cp} = K \theta; \quad (3.1)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ – модуль объёмного расширения; $E = E(t)$ – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона; $\sigma_{cp} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ – среднее напряжение; $e_{cp} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ – средняя линейная относительная деформация; $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – относительная объёмная деформация; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – нормальные напряжения, линейные относительные деформации соответственно вдоль осей x, y, z .

2. Девиатор деформаций пропорционален девиатору напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - e_{cp} &= \psi(\sigma_x - \sigma_{cp}); \quad \gamma_{xy} = 2\psi\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y - e_{cp} &= \psi(\sigma_y - \sigma_{cp}); \quad \gamma_{yz} = 2\psi\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z - e_{cp} &= \psi(\sigma_z - \sigma_{cp}); \quad \gamma_{zx} = 2\psi\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\psi = 1/2G$ – коэффициент пластичности; G – модуль сдвига;

3. Интенсивность напряжений σ_i является функцией интенсивности деформаций e_i и средней деформации e_{cp} , зависящих от характера напряжённого состояния и температуры [155]:

$$\sigma_i = \Phi(e_i, e_{cp}, t), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \\ e_i &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu_c)}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\mu_c = \mu_c(E_c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_c}{E} (1 - 2\mu_0)$ – переменный коэффициент Пуассона, E, μ_0 – начальные модуль упругости и коэффициент Пуассона, $E_c = \frac{\sigma_i}{e_i}$ – переменный секущий модуль упругости.

Зависимость « $\sigma_i - e_i$ » получают экспериментально и представлена функцией $\Phi(x, y, z, t)$.

Для учёта физической и геометрической нелинейностей используются теория малых упругопластических деформаций [85] и теория гибких пластин и оболочек [124].

Относительные линейные деформации и деформации сдвига для отдельной панели записываются в виде:

$$\varepsilon_{z,o} = -\frac{\mu_c}{1-\mu_c} (\varepsilon_{x,o}^z + \varepsilon_{y,o}^z); \quad \gamma_{yz,o} = \gamma_{zx,o} = 0; \quad (3.5)$$

Индекс o относится к оболочке.

Относительные линейные деформации и деформации сдвига для ребра записываются в виде:

$$\varepsilon_{y,p}^z = \varepsilon_{z,p} = -\mu_c \varepsilon_{x,p}^z; \quad \gamma_{xz,p} = \gamma_{xy,p} = 0. \quad (3.6)$$

Индекс p относится к ребру.

Выражения интенсивности деформаций сдвига γ_i и средней деформации e_{cp} для оболочки и рёбер записываются с учётом выражений (3.5), (3.6):

$$e_{cp,o} = \frac{1-2\mu_c}{3(1-\mu_c)} (\varepsilon_{x,o}^z + \varepsilon_{y,o}^z); \quad \gamma_{i,o} = 2 \sqrt{(\varepsilon_{x,o}^z + \varepsilon_{y,o}^z)^2 \Theta_1 - \left(\varepsilon_{x,o}^z \varepsilon_{y,o}^z - \frac{1}{4} \gamma_{xy,o}^2 \right)} \quad (3.7)$$

$$e_{cp,p} = \frac{1-2\mu_c}{3} \varepsilon_{x,p}^z; \quad \gamma_{i,p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(1+\mu_c)^2 (\varepsilon_{x,p}^z)^2 + 0.75 \gamma_{yz,p}^2},$$

$$\text{где } \Theta_1 = \frac{1-\mu_c + \mu_c^2}{3(1-\mu_c)^2}.$$

Напряжения в оболочке в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, по сравнению с другими напряжениями пренебрежительно малы

($\sigma_{z,o} = 0$); деформации сдвига в нормальных сечениях малы $\gamma_{xy,o} = 0, \gamma_{xz,o} = 0, \gamma_{yz,o} = 0; \varepsilon_{z,o} \neq 0$.

Деформации в срединной поверхности оболочки $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, учитывающие геометрическую нелинейность, функции изменения кривизны χ_x, χ_y и кручения χ_{xy} срединной поверхности [39], записываются в зависимости от перемещений U, V, W соответственно вдоль осей x, y, z с учётом начального прогиба срединной поверхности оболочки W_n в точках с координатами (x, y) [100]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + 0.5 \left(\frac{\partial(W + W_n)}{\partial x} \right)^2 - 0.5 \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)^2 - k_1 W; \quad \chi_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} + 0.5 \left(\frac{\partial(W + W_n)}{\partial y} \right)^2 - 0.5 \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)^2 - k_2 W; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial(W + W_n)}{\partial y} \frac{\partial(W + W_n)}{\partial x} - \frac{\partial W_n}{\partial y} \frac{\partial W_n}{\partial x}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Здесь k_1, k_2 – кривизны панели вдоль осей x и y .

Относительные деформации оболочки в точках записываются согласно гипотезе Кирхгофа-Лява [39]:

$$\varepsilon_{x,o}^z = \varepsilon_x + z\chi_x; \quad \varepsilon_{y,o}^z = \varepsilon_y + z\chi_y; \quad \gamma_{xy,o} = \gamma_{xy} + 2z\chi_{xy}, \quad (3.9)$$

где z – расстояние от точки до срединной поверхности оболочки.

Перемещения рёбер относительно срединной поверхности записываются в виде [100]:

$$W_p = W_o = W; \quad U_p = U_o + e \frac{\partial W}{\partial x}; \quad V_p = V_o + e \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \frac{\partial W_o}{\partial x} = \frac{\partial W_p}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (3.10)$$

где e – эксцентриситет ребра (рис. 3.2):

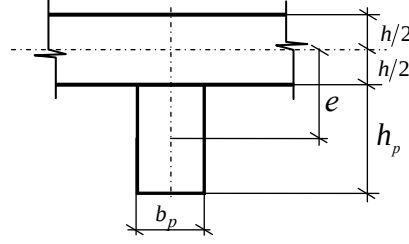


Рис. 3.2. Расчётная схема ребра

Относительные деформации рёбер в точках, расположенных на расстоянии x и y от оси ребра, с учётом изгиба в двух плоскостях, наличия продольной деформации и кручения определяются зависимостями [166]:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{x,p}^z &= \varepsilon_{x,p} - z \frac{\partial^2 W_p}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 V_p}{\partial x^2} = -y \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial x} + 0.5 \left(\frac{\partial(W + W_n)}{\partial x} \right)^2 - 0.5 \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)^2 - k_1 W - e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_{y,p}^z &= \varepsilon_{y,p} - z \frac{\partial^2 W_p}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 U_p}{\partial y^2} = -x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial y} + 0.5 \left(\frac{\partial(W + W_n)}{\partial y} \right)^2 - 0.5 \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)^2 - k_2 W - e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \\ \gamma_{zy,p} &= \gamma_{zx,p} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

Деформация вдоль оси ребра записывается с учётом эксцентриситета e ребра относительно срединной плоскости оболочки:

$$\varepsilon_{x,p} = \varepsilon_{x,o}^z + e\chi_x; \quad \varepsilon_{y,p} = \varepsilon_{y,o}^z + e\chi_y. \quad (3.12)$$

Физические соотношения для тонкостенной оболочки получены путём выражения напряжений через деформации с учётом влияния температуры при линейно упругом деформировании [155, 166]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x,o}^z = E_{cj1}^z(t) \left[\frac{\varepsilon_{x,o}^z + \mu_{cj2}^z \varepsilon_{y,o}^z}{1 - \mu_{cj1}^z \mu_{cj2}^z} + t(x, y, z) (\alpha_{j1T}^z + \mu_{cj2}^z \alpha_{j2T}^z) \right]; \\ \sigma_{y,o}^z = E_{cj2}^z(t) \left[\frac{\varepsilon_{y,o}^z + \mu_{cj1}^z \varepsilon_{x,o}^z}{1 - \mu_{cj1}^z \mu_{cj2}^z} + t(x, y, z) (\alpha_{j2T}^z + \mu_{cj1}^z \alpha_{j1T}^z) \right]; \\ \tau_{xy,o}^z = G_j^z(t) \gamma_{xy}^z. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Напряжения, возникающие в рёбрах:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,p}^z &= E_{cj1}^z(t) (\varepsilon_{x,p}^z + \alpha_{j1T}^z t(x, y, z)); \quad \sigma_{y,p}^z = E_{cj2}^z(t) (\varepsilon_{y,p}^z + \alpha_{j2T}^z t(x, y, z)); \\ \tau_{zy,p}^z &= \frac{\gamma_{kp} E_{cj}^z(t) \gamma_{zy}^z}{2(1 + \mu_{cj}^z)}; \quad \tau_{zx,p}^z = \frac{\gamma_{kp} E_{cj}^z(t) \gamma_{zx}^z}{2(1 + \mu_{cj}^z)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь γ_{kp} – коэффициент, учитывающий соотношение сторон призматического ребра при кручении [53], α_{j1T}^z , α_{j2T}^z – коэффициенты теплового линейного расширения; $t(x, y, z)$ – температура.

Температура в любой точке конструкции равна [54]:

$$t(x, y, z) = t(x, y) + z\Theta(x, y), \quad (3.15)$$

где $t(x, y)$ – температура срединной поверхности; $\Theta(x, y)$ – температурный градиент в направлении нормали к срединной поверхности.

В работе принята модель разномодульного нелинейно-упругого материала В.В. Петрова [155], согласно которой описывается связь между напряжениями, деформациями и свойствами материала. Для случая $\sigma_x^z \geq 0, \sigma_y^z < 0$:

$$G_j^z = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{x,o}^z - \sigma_{y,o}^z}{\left(1 + \mu_{cj1}^z\right) \frac{\sigma_{x,o}^z}{E_{cj1}^z(t)} - \left(1 + \mu_{cj2}^z\right) \frac{\sigma_{y,o}^z}{E_{cj2}^z(t)}}. \quad (3.16)$$

Здесь $cj1 = \{(j=1 \in \sigma_x^z \leq 0) \cup (j=2 \in \sigma_x^z \geq 0)\}$; $cj2 = \{(j=1 \in \sigma_y^z \leq 0) \cup (j=2 \in \sigma_y^z \geq 0)\}$.

Текущие модули упругости $E_{cj1}^z(t)$, $E_{cj2}^z(t)$, коэффициенты Пуассона μ_{cj1}^z, μ_{cj2}^z , модуль сдвига G_j^z и коэффициенты теплового расширения

$\alpha_{j1T}^z, \alpha_{j2T}^z$ зависят от напряжённого состояния (рис. 3.3) и от знаков напряжений, их значений для разномодульного материала. Принятые обозначения соответствуют работам [155, 166].

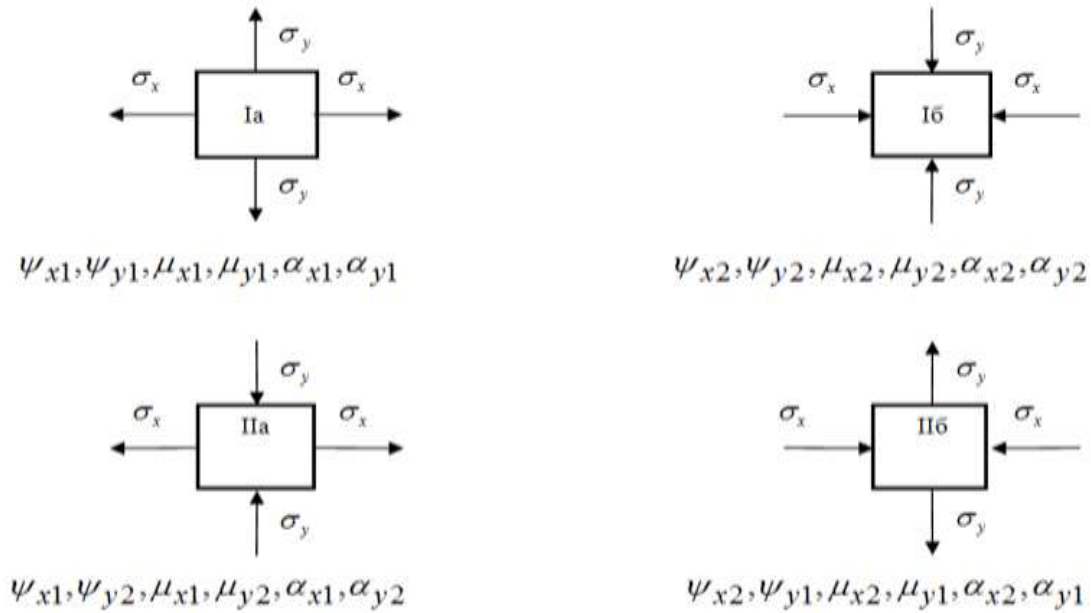


Рис. 3.3. Распределение модулей упругости, функций сжимаемости и температурных коэффициентов в зависимости от вида напряжённого состояния

Усилия и моменты, отнесённые к единице длины сечения, определяют по формулам:

$$\begin{aligned}
 N_{x,o} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{x,o}^z dz; & N_{y,o} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{y,o}^z dz; & S_o &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \tau_{xy,o} dz; \\
 M_{x,o} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{x,o}^z z dz; & M_{y,o} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{y,o}^z z dz; & H_o &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \tau_{xy,o} z dz; \\
 N_{x,p} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{x,p}^z dz; & M_{x,p} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \sigma_{x,p}^z z dz; & M_{kp} &= \int_{-0.5h_k}^{0.5h_k} \tau_{zy,p} z dz.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Согласно приведённым соотношениям между напряжениями, деформациями и перемещениями по заданным перемещениям U, V, W элементов и физическим свойствам материала определяется НДС в панелях и рёбрах.

3.3. Функционал полной потенциальной энергии системы тело-нагрузка в форме Лагранжа

Согласно принципу Лагранжа [183]:

$$\delta\Phi = \delta\Pi - \delta A = 0. \quad (3.18)$$

Здесь Φ – функционал полной потенциальной энергии системы тело – нагрузка; Π – потенциальная энергия внутренних сил:

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{9}{2} K e_{cp}^2 + \int_0^{\gamma_i} \frac{G_0}{\Psi} \gamma_i d\gamma_i \right) dv; \quad (3.19)$$

A – работа внешних сил:

$$A = \iint_F (Xu + Yv + Zw) dF. \quad (3.20)$$

По методу переменных параметров упругости И.А. Биргера [24] проводим линеаризацию. При этом функция пластичности Ψ на каждом этапе итерации t принимается по предыдущему приближению равной Ψ_{t-1} , т. е.:

$$\left(\int_0^{\gamma_i} \frac{G_0 \gamma_i}{\Psi} d\gamma_i \right)_t = \frac{G_0 \gamma_i^2}{2\Psi_{t-1}}. \quad (3.21)$$

Вариация функционала полной потенциальной энергии (3.18) записывается с учётом (3.19), (3.21):

$$\delta\Phi_t = \delta \left[\iiint_V \left(\frac{9}{2} K e_{cp}^2 + \frac{G_0 \gamma_i^2}{2\Psi_{t-1}} \right) dv - \iint_F (XU + YV + ZW) dF \right]_t. \quad (3.22)$$

$F(x, y)$ и $v(x, y, z)$ – площадь и объём оболочки.

Потенциальная энергия деформации записывается как функционал, выраженный через деформации панели (3.7):

$$\Pi_{o,t} = \iint_F \left\{ \int_{-h_k/2}^{+h_k/2} \frac{2G_0}{\Psi_{t-1}} \left[(e_{x,o}^z + e_{y,o}^z) \frac{1}{2(1-\mu_{t-1})} - e_{x,o}^z e_{y,o}^z + 0.25\gamma_{xy,o} \right] dz \right\} dF, \quad (3.23)$$

и через деформации и кривизны срединной поверхности панели (3.9):

$$\begin{aligned} \Pi_{o,t} = & \iiint_V \frac{2G_0}{\Psi_{t-1}} \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \frac{1}{2(1-\mu_{t-1})} - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{4} \right] dV + \\ & + \iint_F \left\{ \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{2G_0}{\Psi_{t-1}} z \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y) (\chi_x + \chi_y) \frac{1}{2(1-\mu_{t-1})} - (\varepsilon_x \chi_y + \varepsilon_y \chi_x) - \frac{\varepsilon_{xy} \chi_{xy}}{2} \right] dz \right\} dF + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_F \left\{ \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{2G_0}{\Psi_{t-1}} z^2 \left[(\chi_x + \chi_y)^2 \frac{1}{2(1-\mu_{t-1})} - \chi_x \chi_y + \chi_{xy}^2 \right] dz \right\} dF + \\
& + \iint_F \left\{ \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\frac{2G_0(1+\mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}(1-\mu_{t-1})} \alpha \cdot t(x, y, z) (\varepsilon_x + z\chi_x + \varepsilon_y + z\chi_y) \right] dz \right\} dF.
\end{aligned} \quad (3.24)$$

При постоянных одномодульных физических характеристиках материала выражение (3.24) приводится к виду [124]:

$$\Pi_o = \Pi_u + \Pi_c, \quad (3.25)$$

где Π_o - потенциальная энергия деформации гибкой полой оболочкой; Π_u - энергия изгиба; Π_c - энергия деформации срединной плоскости.

$$\begin{aligned}
\Pi_u &= 2G_o \iint_A [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 \Theta_{2,t-1} - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{4}] dA; \quad \Theta_{2,t-1} = \frac{1-\mu+\mu^2}{3(1-\mu)^2}; \\
\Pi_c &= \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint_A [(\chi_x + \mu\chi_y)^2 - 2(1-\mu)(\chi_x \chi_y - \chi_{xy}^2)] dA.
\end{aligned} \quad (3.26)$$

Рассмотрим потенциальную энергию деформации продольного ребра. На основании (3.7), (3.11), (3.12) представим выражение в круглых скобках (3.22) через перемещения [166]:

$$\begin{aligned}
\Pi_{px,t} &= \int_0^a \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{G_1}{\Psi_{t-1}} \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W+W_n)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)^2 + e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \right. \right. \\
& - k_1 W - y \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left. \right]^2 (1+\mu_{t-1}) - \frac{\bar{\gamma}_{kp}}{4} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + \\
& + 2(1+\mu_{t-1}) \alpha \cdot t(x, y, z) \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W+W_n)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)^2 + e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \right. \\
& \left. \left. - y \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_1 W \right] \right\} dx dy dz.
\end{aligned} \quad (3.27)$$

Интегрирование по z проводится с учётом эксцентриситета ребра e :

$$\zeta_1 = -0.5h_p + e; \quad \zeta_2 = 0.5h_p + e; \quad (3.28)$$

Аналогично получим для поперечного ребра:

$$\Pi_{py,t} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{G_0}{\Psi_{t-1}} \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W+W_n)}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - k_2 W - x \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Bigg]^2 (1 + \mu_{t-1}) - \frac{\bar{\gamma}_{kp}}{4} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + \\
& + 2(1 + \mu_{t-1}) \alpha \cdot t(x, y, z) \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W + W_n)}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& \left. + e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - x \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \right) - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - k_2 W \right] \Bigg\} dx dy dz \quad (3.29)
\end{aligned}$$

При учёте только геометрической нелинейности без учёта начального прогиба и температурного воздействия [78] потенциальная энергия продольного и поперечного ребра будет записываться в виде:

$$\begin{aligned}
P_{px} = & \frac{EF_p}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EI_y}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx + \\
& + \frac{EI_k}{2} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dy + \frac{EI_z}{2} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dy; \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{py} = & \frac{EF_p}{2} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dy + \frac{EI_x}{2} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dy + \\
& + \frac{EI_k}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

где моменты инерции:

$$I_x = \frac{b_{px}^3 h_{px}}{12} + 0.25(h_{px} + h_0)^2 b_{px} h_{px}; \quad I_y = \frac{b_{py}^3 h_{py}}{12} + 0.25(h_{py} + h_0)^2 b_{py} h_{py}.$$

Для системы ребристых пологих оболочек и пластин с начальным прогибом функционал Лагранжа, учитывающий физическую и геометрическую нелинейности, начальный прогиб, изменение свойств материала при воздействии поперечной нагрузки и внешних воздействий с учётом (3.24), (3.28), (3.29), записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_t = & \Phi_t^n + \Phi_t^p + \Phi_t^q + \Phi_t^{p_x} + \Phi_t^{p_y} + \Phi_t^{nt^{(z)}} + \Phi_t^{pt^{(z)}} + \Phi_t^{p_x t^{(z)}} + \Phi_t^{p_y t^{(z)}}. \\
\Phi_t = & \sum_{k=1}^R \left\{ \int_0^{a/2} \int_{-b_k/2}^{b_k/2} \int_{-h_k/2}^{h_k/2} \frac{2G_0}{\Psi_{t-1}} \left\{ \left[\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)^2 - z \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)^2 - k_1 W_k - k_2 W_k \left\{ \frac{1}{2(1 - \mu_{t-1})} - \right. \\
& - \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - k_1 W_k - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \right\} \left\{ \frac{\partial V_k}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)_k^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} \right)^2 - k_2 W_k - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \left\} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y} + \frac{\partial V_k}{\partial x} + \frac{\partial(W_0 + W)_k}{\partial x} \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} - \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)_k - 2z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right\} dx dy dz \left. \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^R \sum_{m=1}^M \left\{ \int_0^a \int_{-b_{p/2}}^{b_{p/2}} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \frac{G_0(1 + \mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \left\{ \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \right. \right. \right. \\
& - k_2 W_k + e_k \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} - y \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \left. \right\} + \frac{\bar{\gamma}_{kp}}{4} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy dz \left. \right\}_m + \\
& + \sum_{k=1}^R \sum_{l=1}^L \left\{ \int_{-b_{k/2}}^{b_{k/2}} \int_{-b_{p/2}}^{b_{p/2}} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \frac{G_0(1 + \mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \left\{ \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)_k^2 - \right. \right. \\
& - k_2 W_k + e_K \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} - x \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial y^2 \partial x} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \left. \right\}^2 + \frac{\bar{\gamma}_{kp}}{4} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy dz \left. \right\}_l + \\
& + \sum_{k=1}^R \left\{ \int_0^a \int_{-b_{k/2}}^{b_{k/2}} \int_{-h_{k/2}}^{h_{k/2}} \frac{2G_0(1 + \mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}(1 - \mu_{t-1})} \alpha \cdot t(x, y, z) \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)^2 - k_1 W - k_2 W - \right. \right. \\
& - z \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)_k^2 \left. \right\} dx dy dz \left. \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^R \sum_{m=1}^M \left\{ \int_0^a \int_{-b_{p/2}}^{b_{p/2}} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \left\{ \frac{2G_0(1 + \mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \alpha \cdot t(x, y, z) \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \right. \right. \right. \\
& - k_1 W_k + e_k \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} - y \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \left. \right\} dx dy dz \left. \right\}_m + \\
& + \sum_{k=1}^R \sum_{L=1}^L \left\{ \int_{-b_{k/2}}^{b_{k/2}} \int_{-b_{p/2}}^{b_{p/2}} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \frac{2G_0(1 + \mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \alpha \cdot t(x, y, z) \left\{ \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial y} \right)_k^2 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k_2 W_k + e_k \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} - x \left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial y^2 \partial x} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \Bigg\} dx dy dz \Bigg\} + \\
& + \sum_{k=1}^{R+1} \left\{ \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \frac{G_0(1+\mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \left\{ \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \right. \right. \\
& - k_2 W_k + e_k \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} - y \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \Bigg\} + \frac{\bar{\gamma}_{kp}}{4} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy dz \Bigg\} + \\
& + \sum_{k=1}^{R+1} \left\{ \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{\zeta_H}^{\zeta_b} \left\{ \frac{2G_0(1+\mu_{t-1})}{\Psi_{t-1}} \alpha \cdot t(x, y, z) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(W_n + W)_k}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_n}{\partial x} \right)_k^2 - \right. \right. \right. \\
& - k_1 W_k + e_k \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} - y \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} - e_k \frac{\partial^3 W_k}{\partial x^2 \partial y} \right) - z \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \Bigg\} dx dy dz \Bigg\} - \\
& - \sum_{k=1}^R \left\{ \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} (Z_V W_k + V_V V_k + X_V U_k) dx dy \right\}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Здесь суммирование производится по числу продольных рёбер M и числу поперечных рёбер панели L .

Когда рассматриваются панели, подкреплённые только дискретно поставленными рёбрами, выражение (3.32) получается аналогичным выражению в работе [78].

На конструкцию, состоящую из панелей и рёбер, наносится расчётная пространственная сетка, в узлах которой в итоге вычисляется удельная энергия Φ_i . Суммирование удельной энергии с помощью квадратурных формул даёт возможность проинтегрировать функционал. Интегрирование внутри области проводится численными методами.

Для гладких кривых достаточно высокую точность даёт формула Симпсона. Величина интеграла на участке L имеет вид:

$$\int_0^L \Phi(x) dx = \frac{L}{6n} [\Phi_0 + \Phi_{2n} + 4(\Phi_1 + \dots + \Phi_{2n-1}) + 2(\Phi_2 + \dots + \Phi_{2n-2})]. \tag{3.33}$$

Здесь L – интервал интегрирования, разбиваемый на $2n$ равных частей.

Для оценки погрешности квадратурной формулы применяется пересчёт функционала с разными сетками. Близкие результаты расчётов позволяют считать, что вычисление интеграла численно близко к истинному значению.

Потенциальная энергия панели, приходящаяся на единицу площади поверхности, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \Omega_4 (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2\Omega_5 (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \Omega_6 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \\
 & + \Omega_1 \left(\frac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_x \varepsilon_y \right) - \Omega_6 \left(\gamma_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \varepsilon_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \Omega_3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \\
 & + \Omega_7 (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \Omega_8 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

где интегральные жёсткостные параметры оболочки:

$$\begin{aligned}
 \Omega_j = & \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{E_c z^{j-1}(t)}{1 - \mu_c} dz; \quad \Omega_{j+3} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{E_c z^{j-1}(t)}{2(1 - \mu_c^2)} dz; \\
 \Omega_{j+6} = & \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{E_c z^{j-1}(t)}{1 - \mu_c} \alpha \cdot t(x, y, z) dz; \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации продольного ребра, приходящаяся на единицу длины, записывается так:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{p,y} = & \frac{b_p}{2} \bar{\Omega}_1 \left(\varepsilon_x - e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{24} \bar{\Omega}_1 b_p^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 - b_p \bar{\Omega}_2 \left(\varepsilon_x - e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{b_p}{2} \bar{\Omega}_3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{b_p^3}{4} \bar{\Omega}_4 \bar{\gamma}_{kp} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + b_p \bar{\Omega}_1 \left(\varepsilon_x - e \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - b_p \bar{\Omega}_8 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

где интегральные жёсткостные параметры ребра:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_j = & \int_{\varsigma_n}^{\varsigma_s} \frac{E_c z^{j-1}(t)}{2} dz; \quad \bar{\Omega}_{j+3} = \int_{\varsigma_n}^{\varsigma_s} \frac{E_c z^{j-1}(t)}{(1 + \mu_c)} dz; \\
 \bar{\Omega}_{j+6} = & \int_{\varsigma_h}^{\varsigma_u} E_c \alpha \cdot t(x, y, z) z^{j-1} dz; \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации поперечного ребра, приходящаяся на единицу длины, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{p,x} = & \frac{b_p}{2} \bar{\Omega}_1 \left(\varepsilon_y - e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{24} \bar{\Omega}_1 b_p^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e \frac{\partial^3 W}{\partial y^2 \partial x} \right)^2 - b_p \bar{\Omega}_2 \left(\varepsilon_y - e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \\
 & + \frac{b_p}{2} \bar{\Omega}_3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{b_p^3}{4} \bar{\Omega}_4 \bar{\gamma}_{kp} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + b_p \bar{\Omega}_1 \left(\varepsilon_y - e \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - b_p \bar{\Omega}_8 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

3.4. Применение вариационного метода Ритца

Расчётная схема выбирается путём разбиения конструкции на отдельные панели и главные рёбра. Сопряжение элементов конструкции происходит по узловым линиям. В местах сопряжения по всей длине узловых линий вводятся непрерывные распределённые связи четырёх типов (рис.3.4), устраняющие продольные перемещения U , поперечные горизонтальные перемещения V , вертикальные перемещения W , повороты вокруг узловой линии $\partial W/\partial y$.

В работе принимаются координатные функции метода перемещений, записанные для каждой отдельной панели согласно вариационному методу Власова-Канторовича, и развитые в работах А.В. Александрова [3], Л.С. Ляховича, А.М. Черняка [126, 205], В.Н. Завьялова [78].

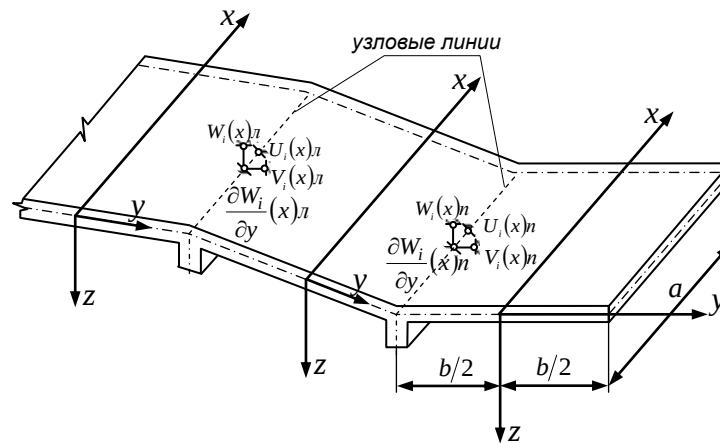


Рис. 3.4. Основная система панелей одного направления

Панели нумеруются слева направо. Для каждой панели используется местная система координат (рис. 3.4). Узловые линии ограничивают каждую кромку панели [78, 166].

Функции перемещений левой узловой линии k -ой панели:

$Z_{4k-3}(x)$ – перемещения в вертикальной плоскости;

$Z_{4k-2}(x)$ – угловое перемещение вокруг продольной оси;

$Z_{4k-1}(x)$ – перемещение вдоль оси x ;

$Z_{4k-0}(x)$ – перемещение вдоль оси y .

Функции перемещения правой узловой линии k -ой панели:

$Z_{4k+1}(x)$ – перемещения в вертикальной плоскости;

$Z_{4k+2}(x)$ – угловое перемещение вокруг продольной оси;

$Z_{4k+3}(x)$ – перемещение вдоль оси x ;

$Z_{4k+4}(x)$ – перемещение вдоль оси y .

Индексы при перемещениях подобраны так, чтобы они не изменялись при переходе от одной панели к другой.

Перемещения в местах сопряжения k и $k-1$ панелей связаны следующими зависимостями:

$$Z_{4k-i} = \sum_{n=1}^N Z_{4k-i}^{(n)} \chi(x), \quad i = -4, \dots, 3. \quad (3.39)$$

n – номер члена разложения; $Z_{4k-i}^{(n)}$ – неизвестные амплитуды соответствующих перемещений; $\chi_n(x)$ – заданная функция в зависимости от граничных условий на поперечных кромках панели.

Координатные функции для каждой отдельной k -ой панели, аналогично работам В.Н. Завьялова [78] и М.О. Моисеенко [143], задаются в виде суммы двух рядов:

$$\begin{cases} U_k = \sum_{\eta}^N U_{ok}^{(\eta)} B_k^{(\eta)} + \sum_{\eta}^N U_{nk}^{(\eta)} Z_j^{(\eta)}, \\ V_k = \sum_{\eta}^N V_{ok}^{(\eta)} C_k^{(\eta)} + \sum_{\eta}^N V_{nk}^{(\eta)} Z_j^{(\eta)}, \\ W_k = \sum_{\eta}^N W_{ok}^{(\eta)} A_k^{(\eta)} + \sum_{\eta}^N W_{nk}^{(\eta)} Z_i^{(\eta)}, \end{cases} \quad (3.40)$$

где N – число взятых в разложении рядов; U_{ok} , V_{ok} , W_{ok} , U_{nk} , V_{nk} , W_{nk} – координатные функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям на кромках k -ой панели; $A_k^{(\eta)}$, $B_k^{(\eta)}$, $C_k^{(\eta)}$, Z_i , Z_j – варьируемые параметры.

Функции, составляющие первый ряд (первые слагаемые в функциях перемещений в формулах (3.40)), удовлетворяют однородным граничным условиям, дают нулевые значения по узловым линиям и удачно аппроксимируют перемещения во внутренней области панели.

Функции, составляющие второй ряд (вторыми слагаемые в формулах (3.40)), получены от задаваемого смещения кромок отдельной панели по ли-

нейной теории [3, 78, 205] и удовлетворяют неоднородным граничным условиям по узловым линиям.

Наиболее общим для них будет случай, когда кромки k -ой панели имеют линейные перемещения как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях, а также угловые перемещения вокруг продольных осей. В этом случае функции перемещений для k -ой панели имеют вид:

$$\begin{aligned}
 W_k &= \sum_{n=1}^N F_{ok}(y) A_k^{(n)} \chi^{(n)}(x) + \sum_{n=1}^N \left[F_{4k-3}^{(n)}(y) Z_{4k-3}^{(n)} + F_{4k-2}^{(n)}(y) Z_{4k-2}^{(n)} + \right. \\
 &\quad \left. + F_{4k+1}^{(n)}(y) Z_{4k+1}^{(n)} + F_{4k+2}^{(n)}(y) Z_{4k+2}^{(n)} \right] \chi^{(n)}(x); \\
 U_k &= \sum_{n=1}^N F_{ok}(y) B_k^{(n)} \chi^{(n)}(x) + \sum_{n=1}^N \left[F_{4k-1}^{(n)}(y) Z_{4k-1}^{(n)} + F_{4k}^{(n)}(y) Z_{4k}^{(n)} + \right. \\
 &\quad \left. + F_{4k+3}^{(n)}(y) Z_{4k+3}^{(n)} + F_{4k+4}^{(n)}(y) Z_{4k+4}^{(n)} \right] \chi^{(n)}(x); \\
 V_k &= \sum_{n=1}^N \bar{F}_{ok}(y) C_k^{(n)} \chi^{(n)}(x) + \sum_{n=1}^N \left[\bar{F}_{4k-1}^{(n)}(y) Z_{4k-1}^{(n)} + \bar{F}_{4k}^{(n)}(y) Z_{4k}^{(n)} + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{F}_{4k+3}^{(n)}(y) Z_{4k+3}^{(n)} + \bar{F}_{4k+4}^{(n)}(y) Z_{4k+4}^{(n)} \right] \chi^{(n)}(x).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Здесь: $F_{4k-3}^{(n)}(y); F_{4k+4}^{(n)}(y)$ – функции прогибов k -ой панели в направлении оси z от единичных перемещений по вертикальному направлению соответственно левой и правой кромок; $F_{4k-2}^{(n)}(y); F_{4k+2}^{(n)}(y)$ – функции прогибов k -ой панели в направлении оси z от единичных поворотов соответственно левой и правой кромок; $F_{4k-1}^{(n)}(y); F_{4k+3}^{(n)}(y)$ – функции продольных перемещений k -ой панели от единичных перемещений в поперечном направлении соответственно левой и правой кромок.

Функционал полной потенциальной энергии тела Φ , выраженный через варьируемые параметры $A_k^{(n)}, B_k^{(n)}, C_k^{(n)}, Z_i^{(n)}, Z_j^{(n)}$, имеет вид:

$$\Phi_t = \Phi(A_k^{(n)}, B_k^{(n)}, C_k^{(n)}, Z_i^{(n)}, Z_j^{(n)}), \tag{3.42}$$

Варьируемые параметры $A_k^{(n)}, B_k^{(n)}, C_k^{(n)}, Z_i^{(n)}, Z_j^{(n)}$ определяются методом прямого поиска (методом сопряжённых градиентов) из условия минимума функционала в по-

ложении равновесия. В общем алгоритме применяется стандартная программа, рассмотренная в работе [162].

Для линеаризации уравнений в диссертации применяется метод переменных параметров упругости И.А. Биргера, выполняемый в следующей последовательности:

Первая итерация (упругий расчёт).

- Величины механических характеристик E_c, μ_c принимаются как для линейного одномодульного материала ($E_c = E_o, \mu_c = \mu_o, \psi = 1$).
- Из условия минимума функционала (3.42) определяются варьируемые параметры функций перемещений.
- В каждой точке нанесённой сетки для численного интегрирования вычисляются компоненты деформаций, по которым определяется интенсивность деформаций e_i (3.3).
- В каждой точке по известной величине интенсивности деформаций $e_i^{(1)}$ и диаграмме деформирования материала определяется интенсивность напряжений $\sigma_i^{(1)}$ (рис.3.6).

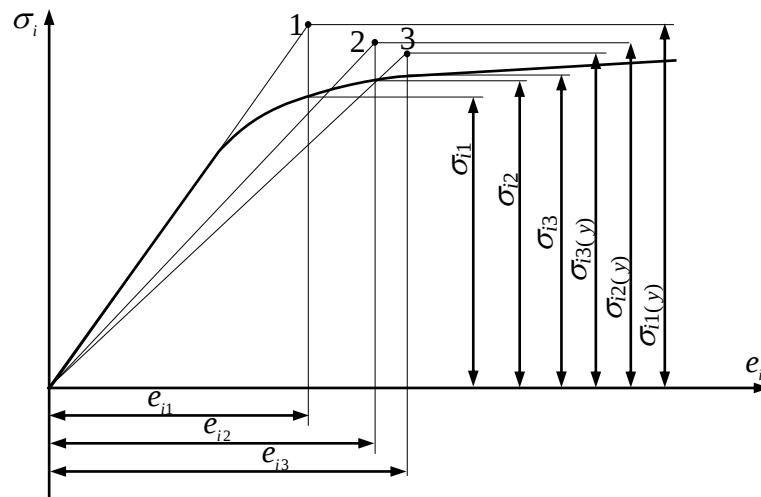


Рис. 3.6 Диаграмма деформирования материала

Вторая итерация.

В каждом слое каждого сечения конструкции подсчитывается уточнённый секущий модуль упругости $E_c^{(2)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{e_i^{(1)}}$, а по нему определяются осталь-

ные физические характеристики материала $\mu_c^{(2)}, \psi^{(2)}$.

Дальнейшие вычисления проводятся как в первой итерации, т.е. процесс циклический.

Итерации продолжаются до тех пор, пока результаты в некотором приближении с заданной погрешностью не будут близки к соответствующим результатам в предыдущем приближении по суммарной энергии и поперечным перемещениям.

Так как μ_c изменяется по всему объёму зон пластических деформаций элементов конструкций, а E_c изменяется при интенсивности напряжений, превышающих предел пропорциональности, то эти функции являются взаимозависимыми:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu_c)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1.5(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)};$$
$$\mu_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_0 e_i}{\sigma_i} (1 - 2\mu_0). \quad (3.43)$$

Если изменение секущего модуля упругости E_c в работах, использующих метод переменных параметров упругости, всегда учитывается, то изменение функции сжимаемости μ_c чаще принимается постоянным ($\mu_c = \text{const}$) [100], что вносит некоторую погрешность в расчёты.

Анализ результатов расчёта по методу переменных параметров упругости показывает, что реализуемый итерационный процесс является сходящимся, а скорость сходимости итерационного процесса значительна [169].

По найденным варьируемым параметрам функций перемещений определяются перемещения (3.41), деформации (3.8), (3.12) и напряжения (3.13), (3.15) в любой точке конструкции и строятся зоны пластических деформаций.

По описанному алгоритму составлена программа расчёта на алгоритмическом языке Pascal [179].

3.5. Исследование сходимости разработанного алгоритма расчёта.

Тестирование алгоритма

На примере численных расчётов напряжённо-деформированного состояния подкреплённых пластин и пологих оболочек разработанным методом исследуется эффективность алгоритма при разном числе членов ряда функций перемещений (3.40) и разной сетке для численного интегрирования и анализируется достоверность полученных результатов при учёте физической и геометрической нелинейностей.

Анализ сходимости итерационного процесса расчёта при учёте геометрической нелинейности.

Наиболее изучено напряжённо-деформированное состояние выполненных из линейно-упругого материала гладких пластин и оболочек с учётом геометрической нелинейности. В диссертации проведено сравнение получаемых результатов расчётов с результатами, представленными в [35], которые можно считать тестовыми.

Рассматривается шарнирно закреплённая квадратная пластина, имеющая следующие граничные условия: при $x = 0, x = a: U = V = W = 0, \frac{\partial W}{\partial x} \neq 0$; при $y = \pm b/2: U = V = W = 0; \frac{\partial W}{\partial y} \neq 0$. Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

Проанализированы результаты расчётов, полученные для разного числа членов ряда аппроксимирующих функций и разной сетке для численного интегрирования в сравнении с тестовыми результатами.

Для анализа результатов расчёта, полученных при разной сетке для численного интегрирования и разного числа взятых в функциях перемещений членов ряда, построены графики относительных величин прогиба и напряжения в центре пластины (рис. 3.7).

Согласно представленным результатам в работе [34] для нагрузки $\bar{q} = 64,1$ ($\bar{q} = qb^4/Eh^4$) прогиб $\bar{W} = 1,04$ ($\bar{W} = W/h$); нормальные напряжения в центре пластины $\bar{\sigma}_x = 2,33$ ($\bar{\sigma}_x = \sigma_x b^2/4Eh^2$).

Значение прогиба $\bar{W} = 1,04$ получено по предложенному алгоритму при сетке $8 \times 8 \times 8$ и трёх членах ряда, значение нормального напряжения в центре

пластины $\bar{\sigma}_x = 2,34$ получено при сетке $12 \times 12 \times 12$ и пяти членах ряда. Таким образом, погрешность результатов, полученных с помощью представленной в диссертации методики, представляет 0,4% процента.

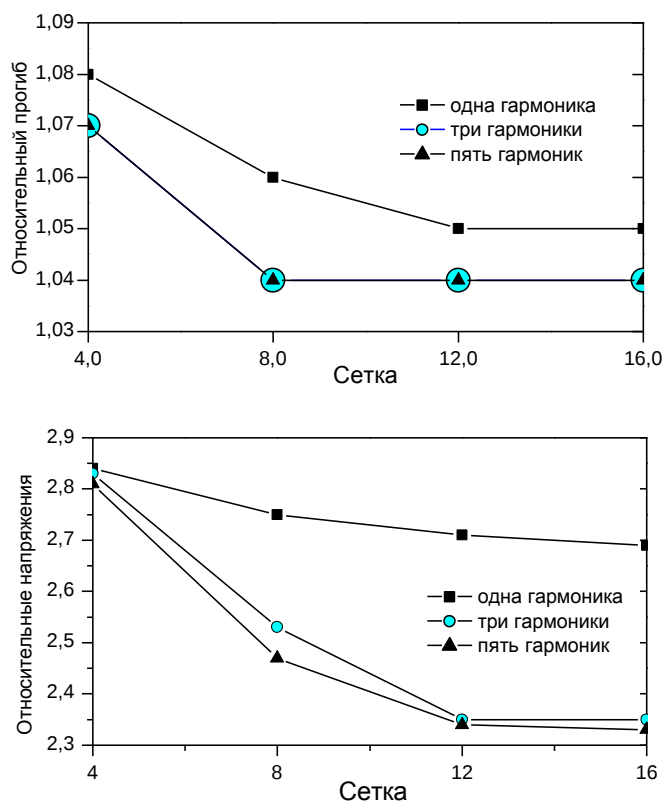


Рис. 3.7. Прогиб и относительные напряжения гибкой пластины при разной сетке для численного интегрирования и разным числе членов ряда аппроксимирующих функций

Анализ результатов, приведённых на графиках (рис. 3.7), показал хорошую сходимость итерационного процесса. При этом сходимость по прогибам лучше, чем по напряжениям. При определении перемещений достаточно брать сетку $8 \times 8 \times 8$ по соответствующей координате и три члена ряда в функциях перемещений. Для получения требуемой точности при определении напряжений необходимо учитывать пять членов ряда в функциях перемещений и принимать сетку $12 \times 12 \times 12$.

Анализ сходимости итерационного процесса расчёта при учёте физической и геометрической нелинейностей в первом и высшем их приближениях при разной густоте сетки.

По представленному алгоритму, исследовались точности результатов

расчёта подкреплённых пластин от количества членов ряда в функциях перемещений и размеров сетки для численного интегрирования функционалов полной потенциальной энергии системы тело-нагрузка.

Исследовалась квадратная подкреплённая гибкая пластина со сторонами $(a/h) \times (b/h) = 40 \times 40$, две противоположные стороны которой закреплены шарнирно, а две другие – опираются на рёбра жёсткости. Рёбра рассматриваются в трёх вариантах: «слабые» $((b_p/h) \times (h_p/h) = 2 \times 4)$, «средние» (4×6) и «сильные» (4×10) . Понятия «слабое», «среднее», «сильное» рёбра введены в работе В.И. Климанова, С.А. Тимашева [100]. «Слабое» ребро жёсткости – $\eta_2 = \frac{EI_p}{Da} \leq 5$; ребро «средней» жёсткости – $5 < \eta_2 \leq 25$; ребро «сильной» жёсткости – $\eta_2 > 25$. Здесь EI_p – жёсткость ребра; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость материала пластины; a – протяжённость ребра.

Материал пластины и рёбер жёсткости Ст3. Зависимость интенсивности напряжения от интенсивности деформаций и другие физические характеристики для которого взяты из работы А.С. Вольмира [39]. Нагрузка равномерно распределенная, превышающая в 2–2,5 раза нагрузку, при которой появляются пластические деформации ($q = 32M_s / h^2$).

На рис 3.8, 3.9 представлены графики, дающие возможность судить о необходимом числе членов ряда в функциях перемещений и густоте сетки для численного интегрирования в области ребра жёсткости ($x = a/2$, $y = b/2$).

Результаты расчётов деформаций и перемещений (рис. 3.8) для разного числа членов ряда получены на сетке $12 \times 12 \times 12$.

Первое приближение по прогибам (рис. 3.8, а) при «среднем» и «сильном» рёбрах жёсткости дает результат близкий к получаемому по третьему приближению. Для результатов расчёта интенсивности деформаций e_i , второе приближение отличается от третьего в пределах инженерной точности (3%). Похожие результаты интенсивности деформаций e_i получены для «слабого»

ребра жёсткости (рис. 3.8,б), хотя здесь отличия результатов второго и третьего приближений достигает 5%. Поэтому, когда требуется большая точность расчёта, необходимо удерживать пять членов ряда. Если сравнить результаты первого приближения, то они дают завышенные результаты и идут в запас по прочности и жёсткости.

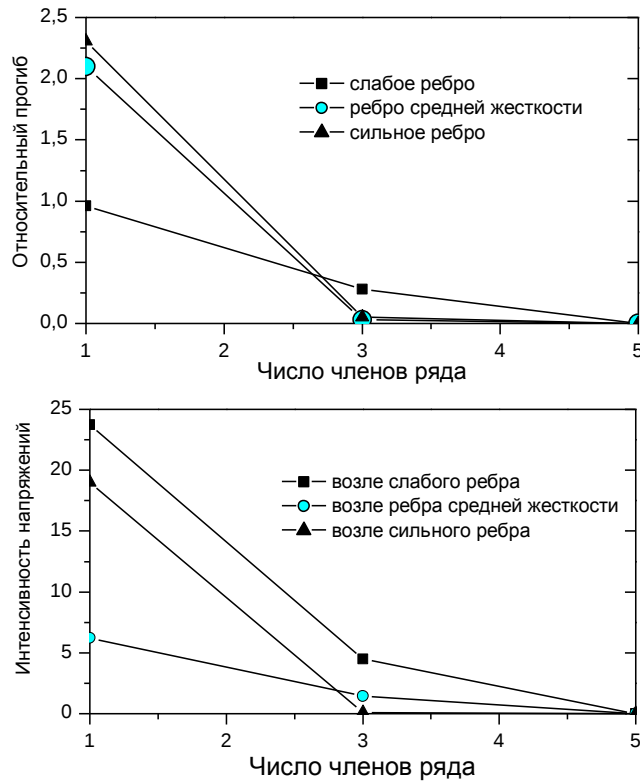


Рис. 3.8. Результаты расчётов пластины возле ребра жёсткости на сетке $12 \times 12 \times 12$ для разного числа членов ряда аппроксимирующих функций для нагрузки $q = 32M_S / a^2$

Из анализа полученных результатов расчёта следует, что для получения результатов с погрешностью 3 - 5 % достаточно второго приближения по числу удерживаемых членов ряда в функциях перемещений.

Проанализируем результаты расчётов в третьем приближении на сетках $4 \times 4 \times 4$, $8 \times 8 \times 8$, и $12 \times 12 \times 12$ в направлении координат x, y, z соответственно. Полученные результаты сравним с результатами, полученными на более густой сетке.

На рис. 3.9 представлены графики прогибов (рис. 3.9, а) и интенсивности напряжений (рис. 3.9, б), полученные для различных сеток и пяти членах

ряда функций перемещений при нагрузке $q = 32M_S / a^2$ для «слабого», «сильного» и «среднего» рёбер жёсткости.

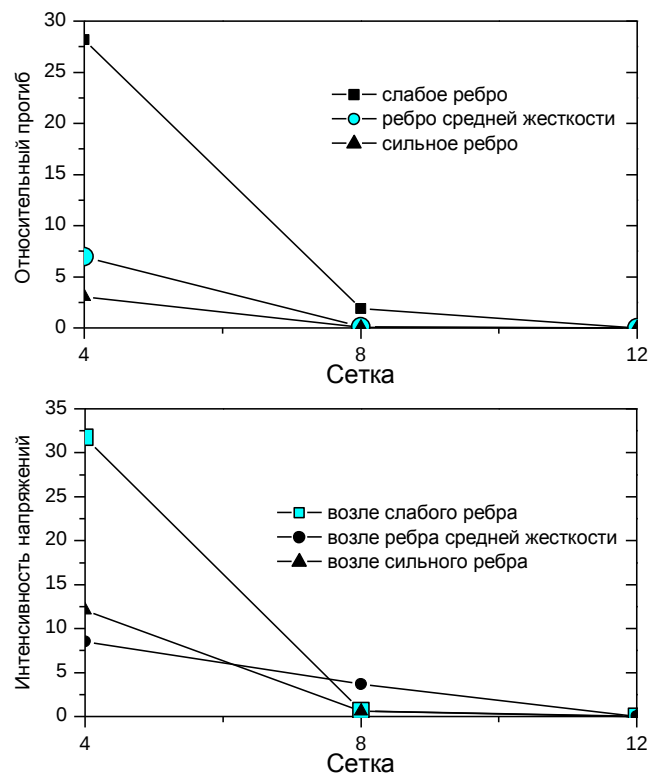


Рис. 3.9. Результаты расчётов верхней поверхности пластины возле рёбра жёсткости для пяти членов ряда функций перемещений на разной сетке для нагрузки $q = 32M_S / a^2$

Анализ результатов расчёта, приведенный на рис. 3.9 показывает, что на сетке $(4 \times 4 \times 4)$ получаем неудовлетворительный результат, особенно для «слабых» рёбер жёсткости. Результаты, полученные на сетке $8 \times 8 \times 8$, достаточно близки к результатам, полученным на сетке $12 \times 12 \times 12$. Установлено, чем жёстче ребро, тем ближе результаты между собой (погрешность 3 - 5%).

Удовлетворительные результаты расчётов получены на сетке $8 \times 8 \times 8$. Для более точных расчётов при «слабом» ребре жёсткости следует принимать сетку – $12 \times 12 \times 12$ по каждой координате.

Из анализа полученных результатов расчётов следует:

– для практических расчётов достаточная точность результатов, характеризующих НДС, достигается при удержании в функциях перемещений трёх членов ряда и сетке для численного интегрирования – $8 \times 8 \times 8$. При рассмот-

рении пластических деформаций необходима более густая сетка для численного интегрирования и увеличение числа членов ряда в функциях перемещений;

– результаты расчёта в первом приближении на сетке $4 \times 4 \times 4$ протяжённости элемента по соответствующей координате для численного интегрирования получаются завышенными и идут в запас по прочности и жёсткости.

Рассмотрим возможности применения разработанного алгоритма и достоверность получаемых результатов при расчёте системы гибких пластин и полых оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей, начального прогиба и механических свойств материала, зависящих от температуры.

Учёт физической нелинейности.

Рассчитывается прямоугольная шарнирно закреплённая пологая оболочка за пределом упругости материала. Толщина оболочки 1 см, стрела подъёма в центре оболочки $f = 2$ см, размер в плане – $a \times b = 40 \times 40$ (см). Поверхность оболочки описывается уравнением эллиптического параболоида. Материал оболочки Ст3. На оболочку действует поперечная равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 2$ МПа. Результаты сравниваются с результатами, представленными в работе А.И. Стрельбицкой [185], где расчёт проводился методом конечных разностей.

Для оболочки разработанным методом проводился численный анализ сходимости итерационного процесса решения упругопластической задачи методом переменных параметров упругости. На рис. 3.10 приведены результаты расчётов при семи итерациях по основным параметрам: для центрального сечения по прогибам, интегральным характеристикам жёсткости, нормальному усилию, текущему модулю упругости для верхней центральной точки и энергии деформации оболочки.

При анализе кривых, представленных на рис. 3.10, наблюдается быстрая сходимость при незначительном числе приближений. Расхождение полученных результатов незначительное (до 4,5% при третьем приближении).

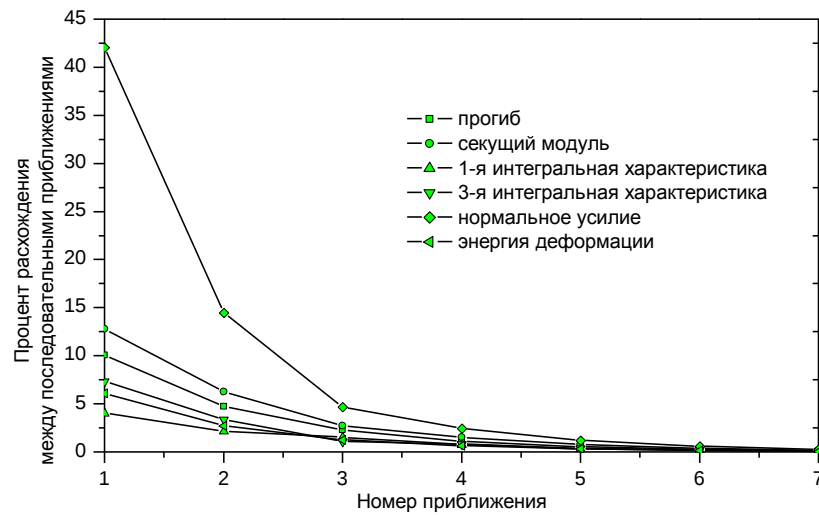


Рис. 3.10. Сходимость итерационного процесса по МППУ

Из сравнения результатов следует, что разработанный алгоритм позволяет учесть физическую нелинейность деформирования, имеет быструю сходимость, даёт достоверный результат при хорошей точности и может использоваться для расчёта сложных тонкостенных конструкций

Учёт начального несовершенства формы.

В работе Т. Янга [213] приводятся результаты расчёта методом конечных элементов несовершенных квадратных пластин, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой (рис. 3.11).

У пластин два противоположных края свободно оперты, а два других защемлены. Функция начального прогиба задаётся с учётом граничных условий:

$$W_n = W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right).$$

Рассмотрены четыре случая величины максимального начального прогиба $W_0 = 0; 0,5h; h; 2h$.

На рис. 3.11 в виде графиков зависимости приведённого прогиба центра пластины от приведённой нагрузки представлен результат расчёта Т. Янга.

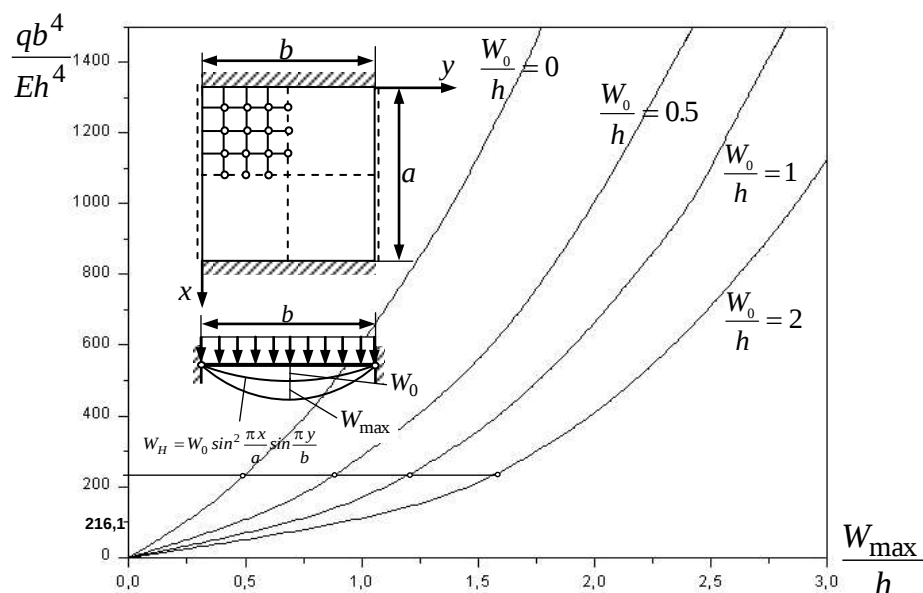


Рис. 3.11. График зависимости « $\bar{W} - \bar{q}$ » при $\bar{q} = 216,1$ ($\mu = 0,316$)

На кривые наложен результат расчёта пластины, выполненный по представленному в диссертационной работе алгоритму, при постоянной приведённой нагрузке $\bar{q} = qb^4/Eh^4 = 216,1$, показывающий удовлетворительное совпадение результатов (расхождение – 3 %). Отмечается существенная зависимость прогибов пластины от начального прогиба.

Учёт неоднородности в упругой и пластической областях.

В работе А.И. Стрельбицкой [183] приведены результаты расчёта методом конечных разностей упругопластического изгиба шарнирно опертых квадратных пластин из неоднородного материала, нагруженных равномерно распределённой нагрузкой. Изменение значений модуля упругости E^H и предела текучести σ_T^H неоднородного материала на срединной поверхности пластины в зависимости от поперечной координаты z происходит по линейному закону:

$$E^H(z) = E \left(1 \pm \frac{2z}{h} \frac{\varphi^H}{E} \right); \quad \sigma_T^H(z) = \sigma_T \left(1 \pm \frac{2z}{h} \frac{f^H}{\sigma_T} \right),$$

где φ^H/E и f^H/σ_T – параметры упругой и пластической неоднородности; φ^H, f^H – приращение (убывание) модуля упругости и предела текучести в крайних волокнах неоднородной пластины; $2z/h$ – относительное расстояние волокон от срединной поверхности пластины. Исследовалось одинаковое измене-

ние модуля упругости и предела текучести материала по толщине пластины в виде безразмерных параметров $\varphi^{\Pi} / E = f^{\Pi} / \sigma_T$, принимающих значения 0,50; 0,25; 0; -0,25; -0,50.

Результаты расчётов, полученных методом конечных разностей в виде графиков зависимости прогиба центра пластины от равномерно распределённой нагрузки, приведены на рис. 3.12. Кривые зависимостей « $\bar{q} - \bar{W}$ » (рис. 3.12) имеют разный наклон на упругом участке вследствие разных величин модуля упругости и существенно отличаются при возникновении пластических деформаций в пластине.

На кривые наложен результат, полученный при постоянной приведённой нагрузке $\bar{q} = q\lambda^2 / M_s = 1,185$, по представленному в данной диссертационной работе алгоритму.

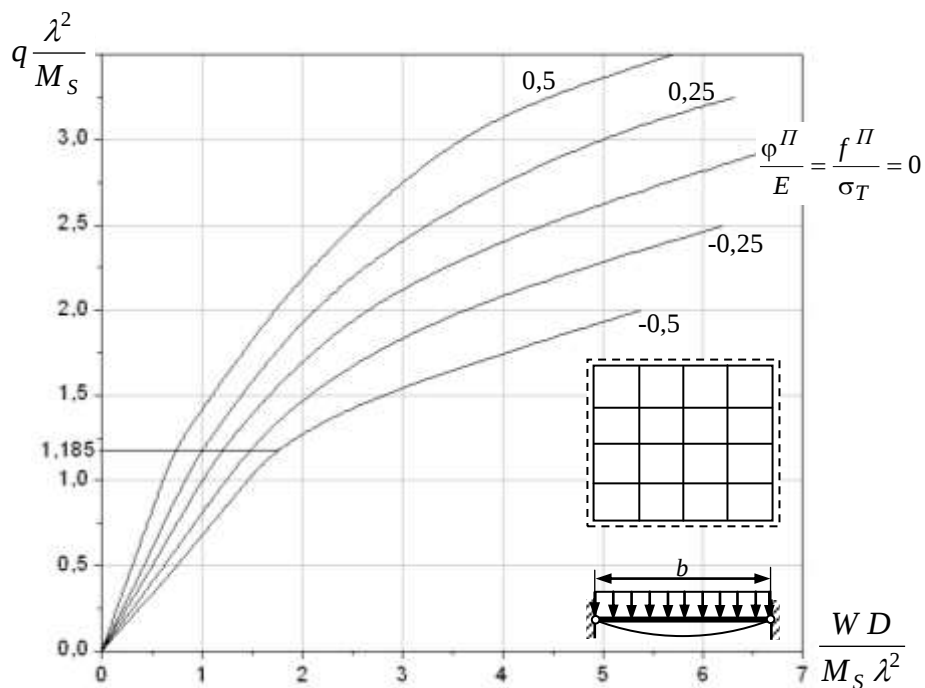


Рис. 3.12. Сравнение результатов по максимальным прогибам при расчёте пластины с учётом разной величины неоднородности в упругой и пластической областях ($\bar{q} = 1,185$)

Сравнение результатов свидетельствует о хорошей сходимости итерационного процесса (погрешность в пределах 3%). Отмечается существенная зависимость прогибов от величины неоднородности материала.

3.6. Выводы по третьей главе

1. Разработан алгоритм расчёта подкреплённых гибких прямоугольных пластин и пологих оболочек, имеющих начальные прогибы, с одновременным учётом двойной (физической и геометрической) нелинейности и находящихся под действием поперечной нагрузки и температуры.

2. Обоснованы и получены основные зависимости теории расчёта пластин и оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа–Лява. При этом геометрическая нелинейность учитывается по теории Т. Кармана, а физическая нелинейность реализуется согласно теории малых упругопластических деформаций. Так же по модели В.В. Петрова учитывается зависимость материала конструкции от вида напряжённого состояния.

3. Получено выражение функционала полной потенциальной энергии системы тело-нагрузка в перемещениях с учётом начального прогиба.

4. Приведена основная расчётная схема, построенная путём разбиения конструкции на отдельные укрупнённые элементы по узловым линиям. Функции перемещений записываются с учётом совместности перемещений по узловым линиям и полноты во внутренних областях.

5. Предложено применять интегрирование при вычислении функционала полной потенциальной энергии подкреплённых элементов со ступенчато меняющейся жесткостью с учётом нелинейности и разномодульности.

6. Разработан алгоритм расчёта неоднородных прямоугольных пластин и пологих оболочек с использованием метода переменных параметров упругости, который позволяет учитывать физическую нелинейность и изменение физико-механических свойств материала при действии температуры.

7. Проведён анализ результатов численных расчётов, который показал, что достаточная для практических целей точность результатов по прогибам и напряжениям, характеризующих НДС, получена при удержании в функциях перемещений пяти членов ряда и сетке для численного интегрирования $12 \times 12 \times 12$ протяженности конструктивного элемента по соответствующей координате.

8. Проведена проверка достоверности полученных результатов расчёта. Решены и проанализированы различные тестовые задачи. Сравнение полученных результатов с контрольными результатами подтверждает достоверность расчётов. Расхождение результатов составляет порядка 3%, что находится в пределах допустимой погрешности.

ГЛАВА 4

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫМИ ПРОГИБАМИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

В данной главе приведены результаты исследования напряжённно-деформированного состояния двухпанельных подкреплённых гибких пластин и пологой цилиндрической оболочки с помощью разработанного метода.

Исследовалось влияние начального прогиба (НП), разного вида нелинейностей [140, 142, 196, 199, 240], изменение механических свойств материала, зависящих от температуры [138] на напряжённно-деформированное состояние элементов конструкций.

Рассматривались пластины постоянной толщины с двумя равными панелями размерами в плане $a \times b = 50 \times 50$ (см), находящиеся под действием поперечной нагрузки интенсивностью q и с шарнирным опиранием всех сторон на жёсткие опоры. Материал пластины и ребра сталь Ст3 (модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_s = 240$ МПа). Действующая равномерно распределённая поперечная нагрузка прикладывается на всю пластину или на одну из её панелей.

Также исследовалось влияние начального прогиба и рёбер разной жёсткости на напряжённно-деформированное состояние пологой цилиндрической оболочки средней кривизны ($k_y a^2/h = 30$) размерами $50 \times 50 \times 1$ (см), выполненной из материала Д16Т [164].

4. 1. Определение напряжённно-деформированного состояния ребристой пластины с начальным прогибом при действии несимметричной поперечной нагрузки

Анализируется зависимость напряженно-деформированного состояния в зависимости от толщины подкреплённой пластины, наличия начального про-

гиба пластины. Для удобства анализа результаты расчётов приведены в безразмерном виде.

Проведено исследование упругопластического НДС гибкой ребристой пластины постоянной толщины при действии поперечной нагрузки, приложенной к левой панели (рис. 4.1, а) [163, 196, 199, 240]. Пластина состоит из квадратных панелей $a \times b = 50 \times 50$ (см). y' – ось симметрии пластины. Диаграмма деформирования материала представлена на рис. 4.1, б. и практически является диаграммой Прандтля для идеального упругопластического тела без упрочнения.

Рассматривались варианты пластин толщиной: $0,7h$; h ; $1,5h$ ($h = 1$ см). Относительная толщина пластин соответственно: $h/a = 1/50$; $0,7h/a = 1/71$; $1,5h/a = 1/33$. В центре каждой пластины находится ребро размером $b_p \times h_p = 3 \times 3$; 4×4 ; 4×6 (см) соответственно. Ребро расположено с эксцентриситетом относительно срединной поверхности. b_p , h_p – ширина и высота ребра.

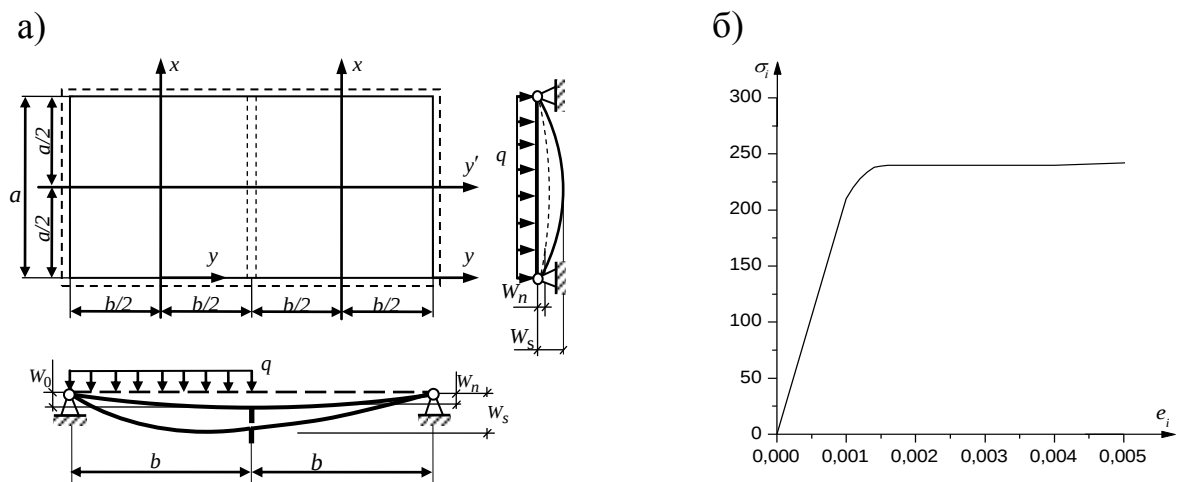


Рис. 4.1. Двухпанельная стальная пластина:
а) расчётная схема пластины; б) диаграмма деформирования материала Ст3

Пластина имеет несовершенства формы в виде начального прогиба W_n (рис. 4.1, а). Начальный прогиб записывается аналитическим выражением:

$$W_n(x, y) = W_0 F_1(x) F_2(y) \quad (4.1)$$

Здесь $F_1(x) = \sin \pi x$ при $(0 \leq x \leq 1)$; $F_2(y) = \sin 0.25\pi(1 + \eta y)$ при $(-1 \leq y \leq 1)$; $\eta = 1$ при $k = 1$; $\eta = -1$ при $k = 2$ (k – номер панели). W_0 – максимальный началь-

ный прогиб в центре пластины. Рассматривались случаи, когда $W_0 = -0,5h; 0; +0,5h$. W_s – прогибы пластины, получаемое суммированием начального прогиба W_n и дополнительного прогиба пластины W от нагрузки.

Если стрела подъёма оболочки $f \leq 1/5a$ (a – меньший размер в плане), то данную оболочку можно рассматривать, как пологую [104]. В рассматриваемых пластинах с начальным прогибом это соотношение равно $f = 0,01a$. Для исследуемых пластин максимальное соотношение $f/h = 0,71$, то есть не превышает $f/h = 2$. Данную оболочку можно считать «очень полой оболочкой» [124]. В таких полых оболочках при нагружении нет «хлопка», а есть «выворачивание». Небольшой подъём оболочки позволяет применить геометрическую гипотезу [104]: оболочка принимается настолько полой, что геометрию её поверхности можно приближённо считать совпадающей с геометрией плоскости её проекции.

При определении НДС рассматривалось линейное решение (ЛР), решение только с учётом физической нелинейности (ФН), только с учётом геометрической нелинейности (ГН) и с учётом двойной нелинейности – физической и геометрической (ФГН). Для анализа НДС пластин с разным начальным прогибом при действии поперечной равномерно распределённой нагрузки q определялись прогибы W точек срединной поверхности в направлении оси z и интенсивность деформаций e_i в наиболее характерных точках пластины (в центре панели, центре пластины и на ребре), определяемым по эпюрам прогибов и интенсивности деформаций. $\bar{q} = q/q_s$ – приведённая нагрузка, $\bar{W} = W/h$ – приведённый прогиб, $\bar{e}_i = e_i/e_s$ – приведённая интенсивность деформаций ($e_s = \sigma_s/E$ – деформация, соответствующая пределу текучести материала). Нагрузка, соответствующая началу текучести – q_s для пластины без начального прогиба определялась по зависимости «интенсивность деформаций – нагрузка» – « $e_i - q$ » при $e_i = e_s$, $e_i = \sigma_s/E = 0,001143$ для стали Ст3. Приложенная максимальная распределённая нагрузка превышала нагрузку начала текучести в три раза ($q = 3q_s$).

4.1.1. Пластина толщиной h (относительная толщина $h/a = 1/50$)

Ниже приведены результаты расчётов двухпольных пластин с относительной толщиной $h/a = 1/50$ с положительным и отрицательным начальными прогибами вдоль продольной оси симметрии и проделан их анализ [142, 163].

На рис. 4.2 представлены эпюры приведённых прогибов $\bar{W} = W/h$ по оси симметрии пластины, полученные при линейном расчёте и при учёте разных видов нелинейностей. Для анализа изменения интенсивности деформаций от нагрузки были построены эпюры приведенной интенсивности деформаций $\bar{e}_i = e_i / e_s$ (e_s – предел текучести) для верхних и нижних волокон (рис. 4.3, 4.4).

Расчёты приведены при нагрузке $q = 2q_s$. Нагрузка начала текучести для данной пластины $q_s = 0,4 \text{ МПа}$.

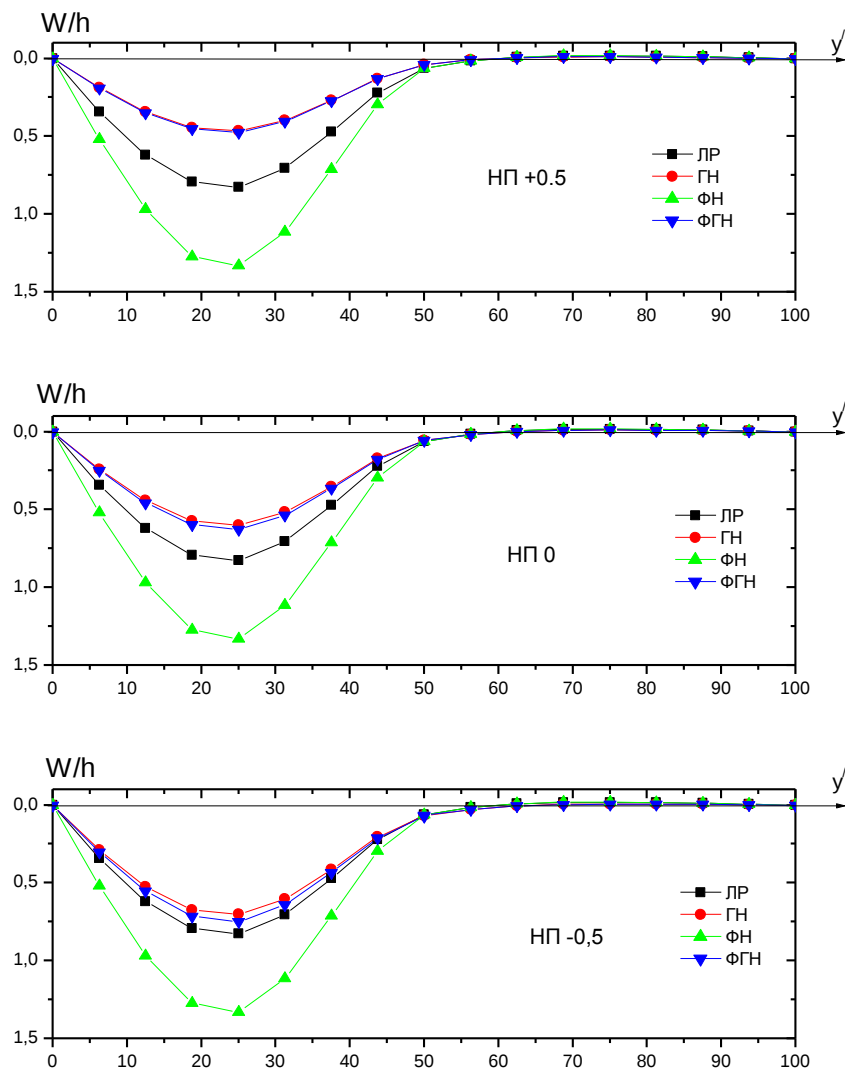


Рис. 4.2. Эпюры приведённых прогибов W/h по оси симметрии пластины толщиной h при нагрузке $q = 2q_s$

Наибольшие прогибы возникают в середине нагруженной панели (рис. 4.2). Результаты решения с учётом только геометрической нелинейности и двойной нелинейности (физической и геометрической) различаются незначительно. Наибольшее отличие получены при сравнении результатов расчётов по прогибам и интенсивности деформаций, проведённых по линейному расчёту и с учётом только физической нелинейности (рис. 4.2, 4.3). Линейное решение наиболее близко к решению с учётом физической и геометрической нелинейности при отрицательном начальном прогибе.

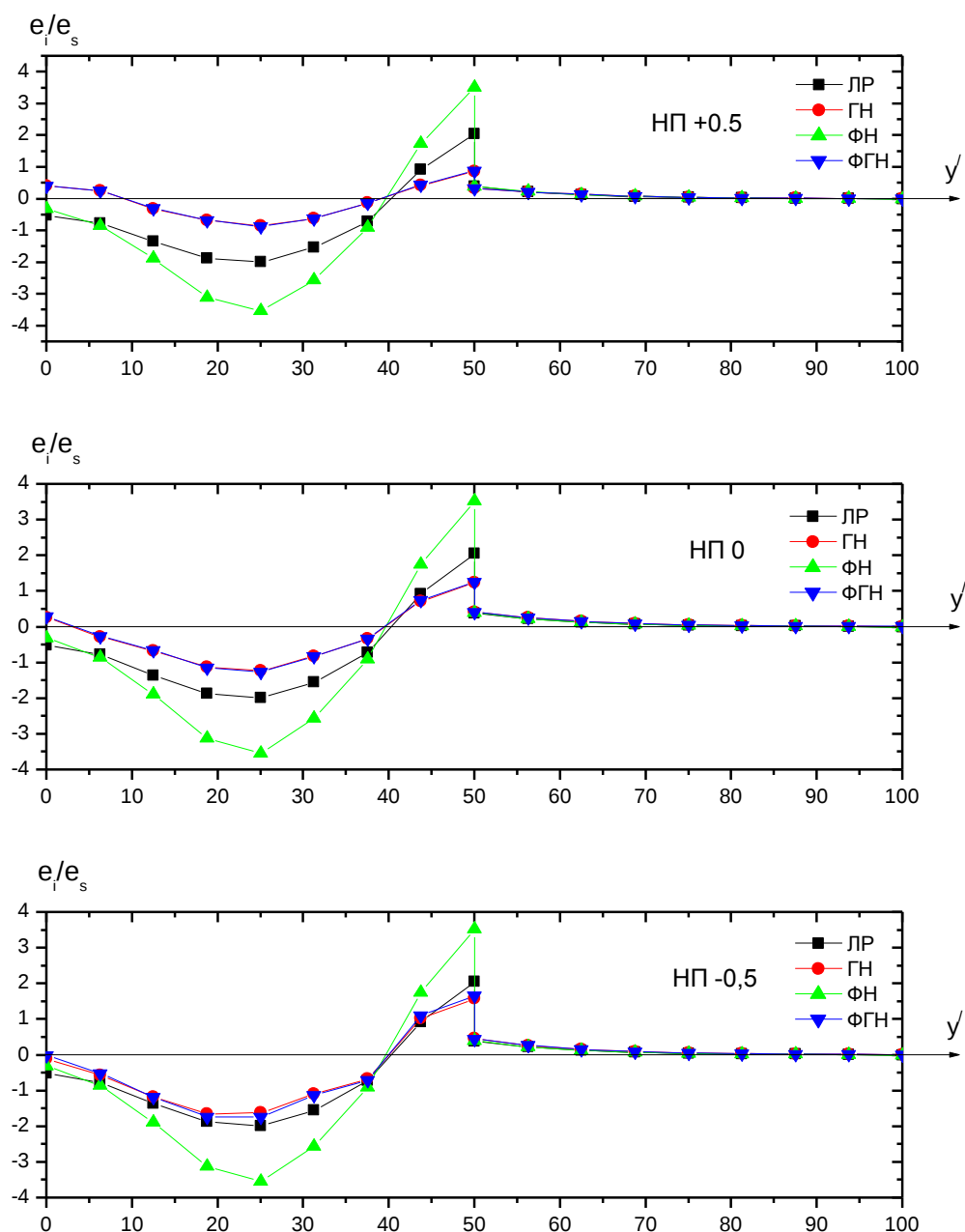


Рис. 4.3. Эпюры приведенной интенсивности деформаций e_i/e_s для верхних волокон по оси симметрии пластины толщиной h при нагрузке $q = 2q_s$

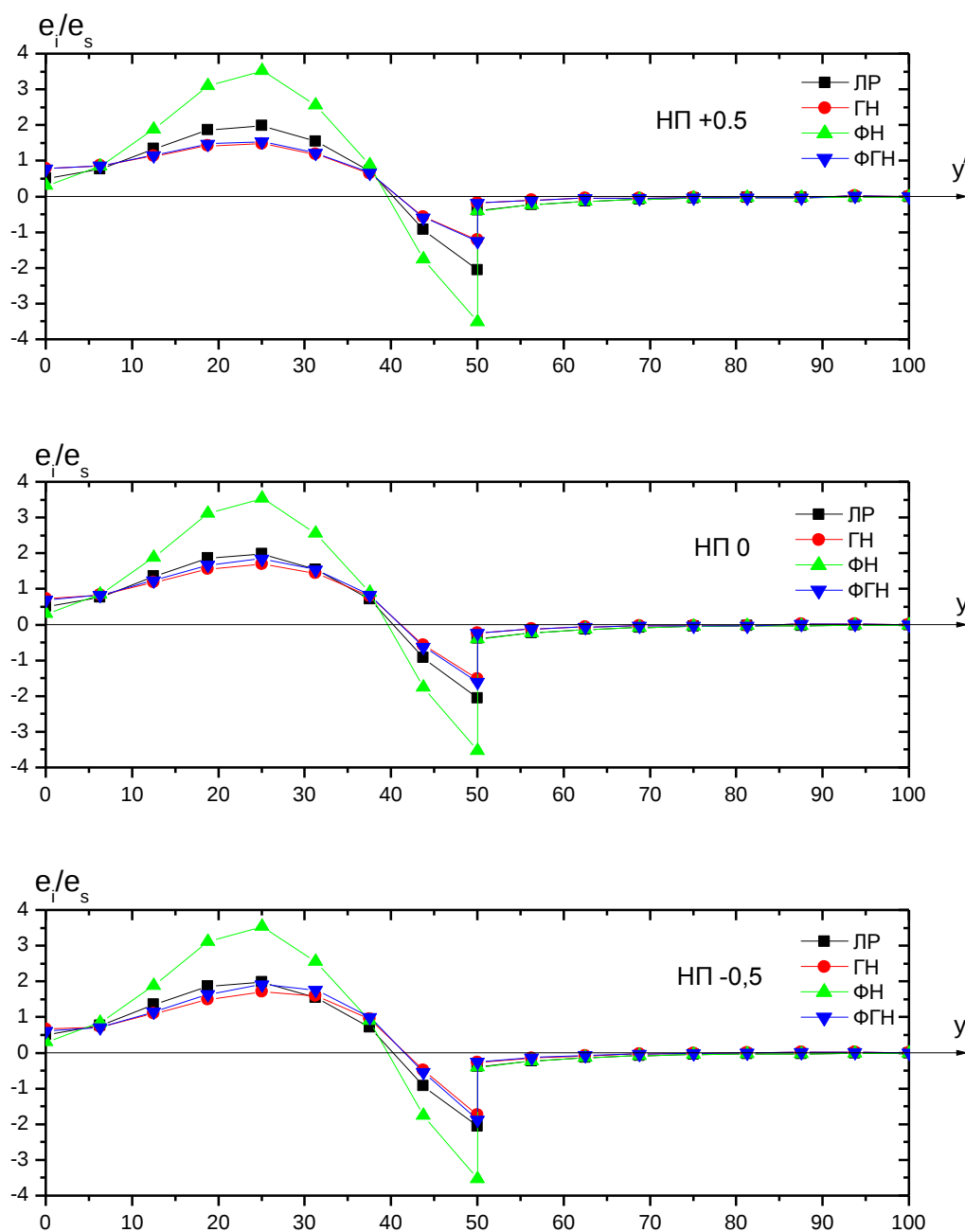


Рис. 4.4. Эпюры приведенной интенсивности деформаций e_i/e_s для нижних волокон по оси симметрии пластины толщиной h при нагрузке $q = 2q_s$

На представленных эпюрах приведённой интенсивности деформаций (рис. 4.3, 4.4) отмечается скачок этого параметра в центре пластины. Это связано с нагрузкой только на левой панели и влиянием центрального подкрепляющего ребра. Вторая ненагруженная панель имеет малые прогибы и поэтому значения величин, характеризующих НДС, близки к полученным при линейном решении (отличие составляет 2%).

Наибольшие величины интенсивности деформации возникают в сере-

дине левой панели, в центре пластины и на ребре независимо от величины начального прогиба (рис. 4.3, 4.4). Для указанных характерных точек построены графики зависимости приведённого прогиба от приведённой нагрузки – « $\bar{W} - \bar{q}$ » и приведённой интенсивности деформаций от приведённой нагрузки – « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » (рис. 4.5 – 4.8) в безразмерных величинах.

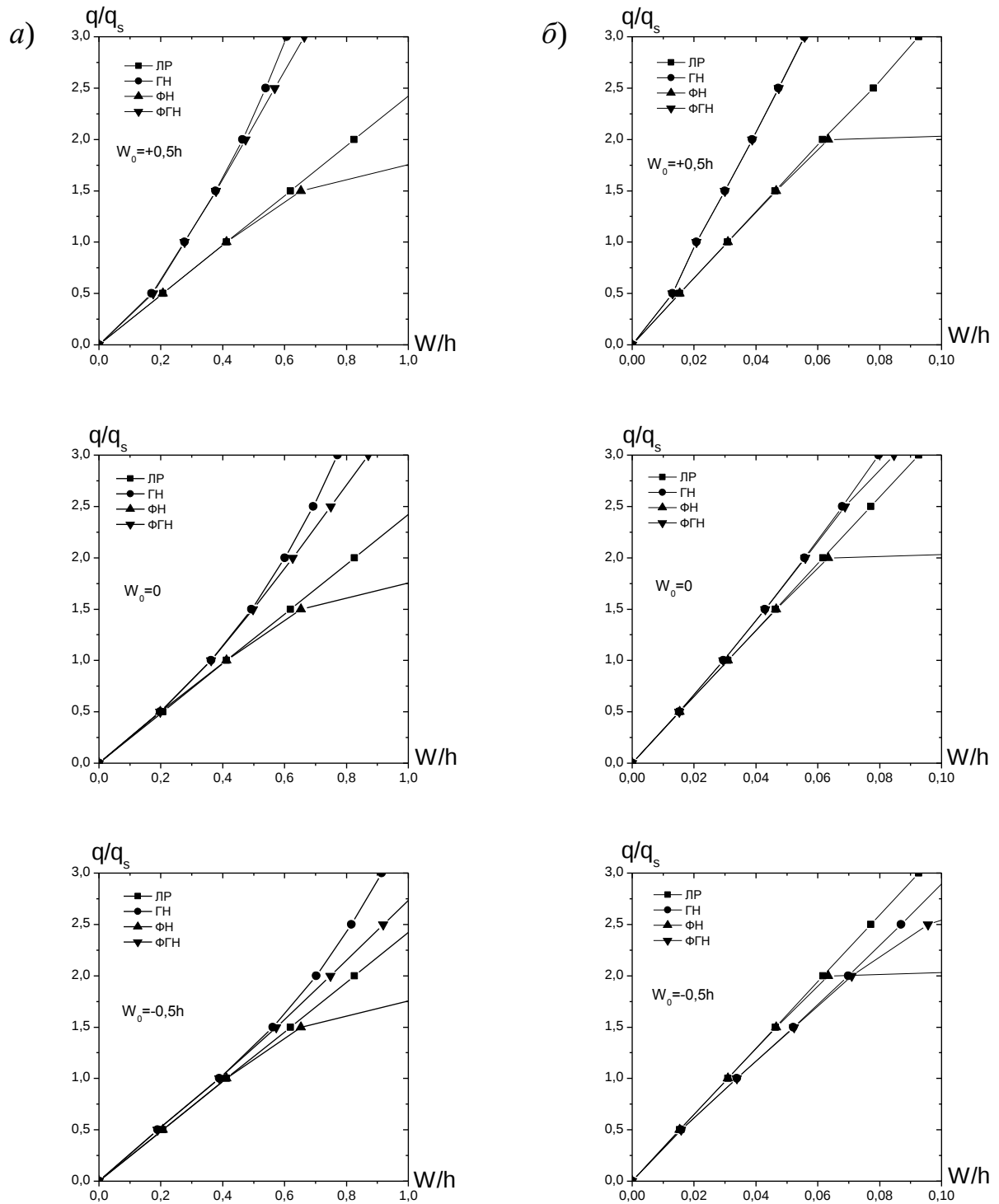


Рис. 4.5. Графики зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » пластины толщиной h :
а) в центре левой панели; б) в центре пластины

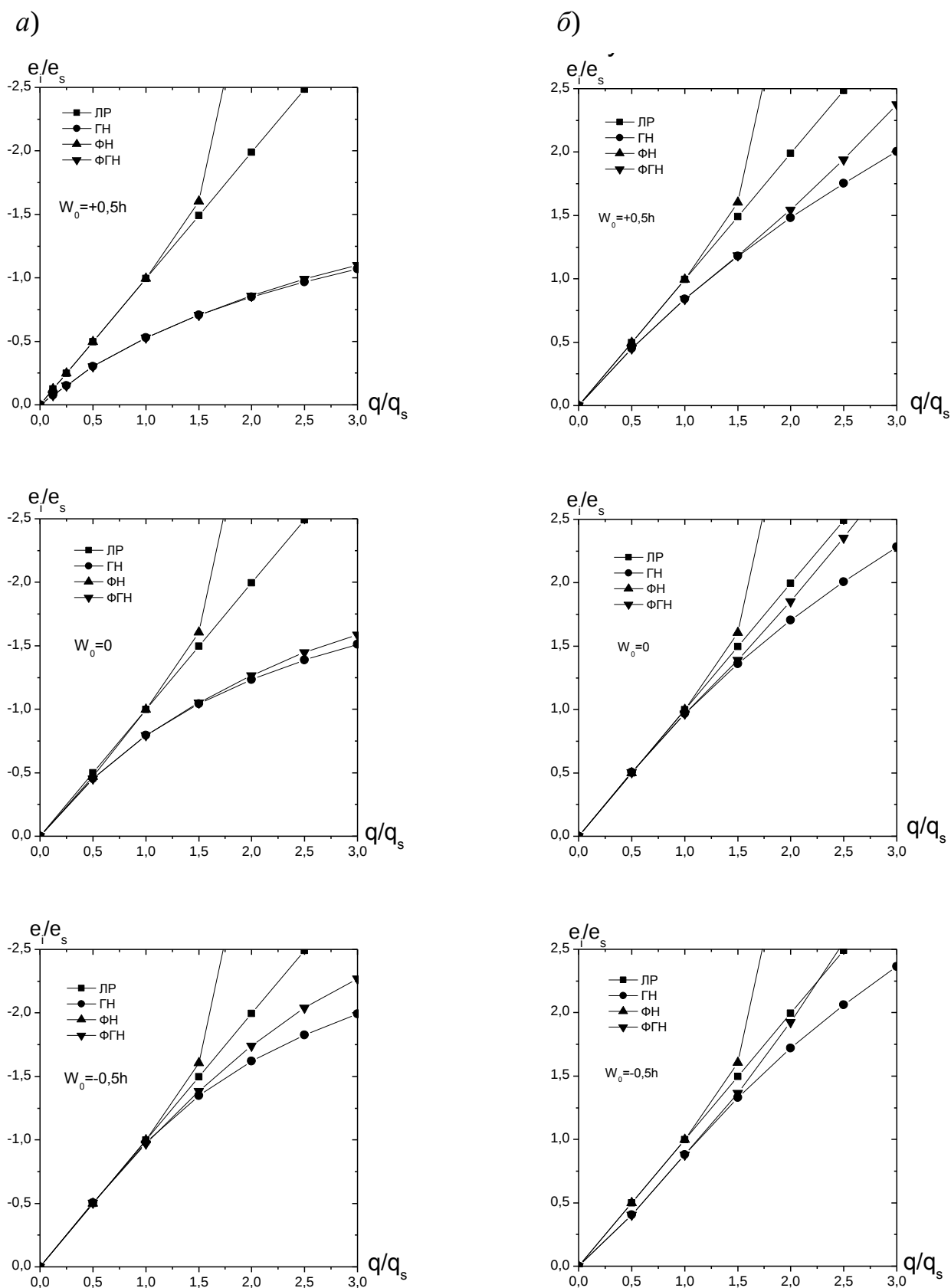


Рис. 4.6. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной h :

а) в верхних волокнах центра левой панели;

б) в нижних волокнах центра левой панели

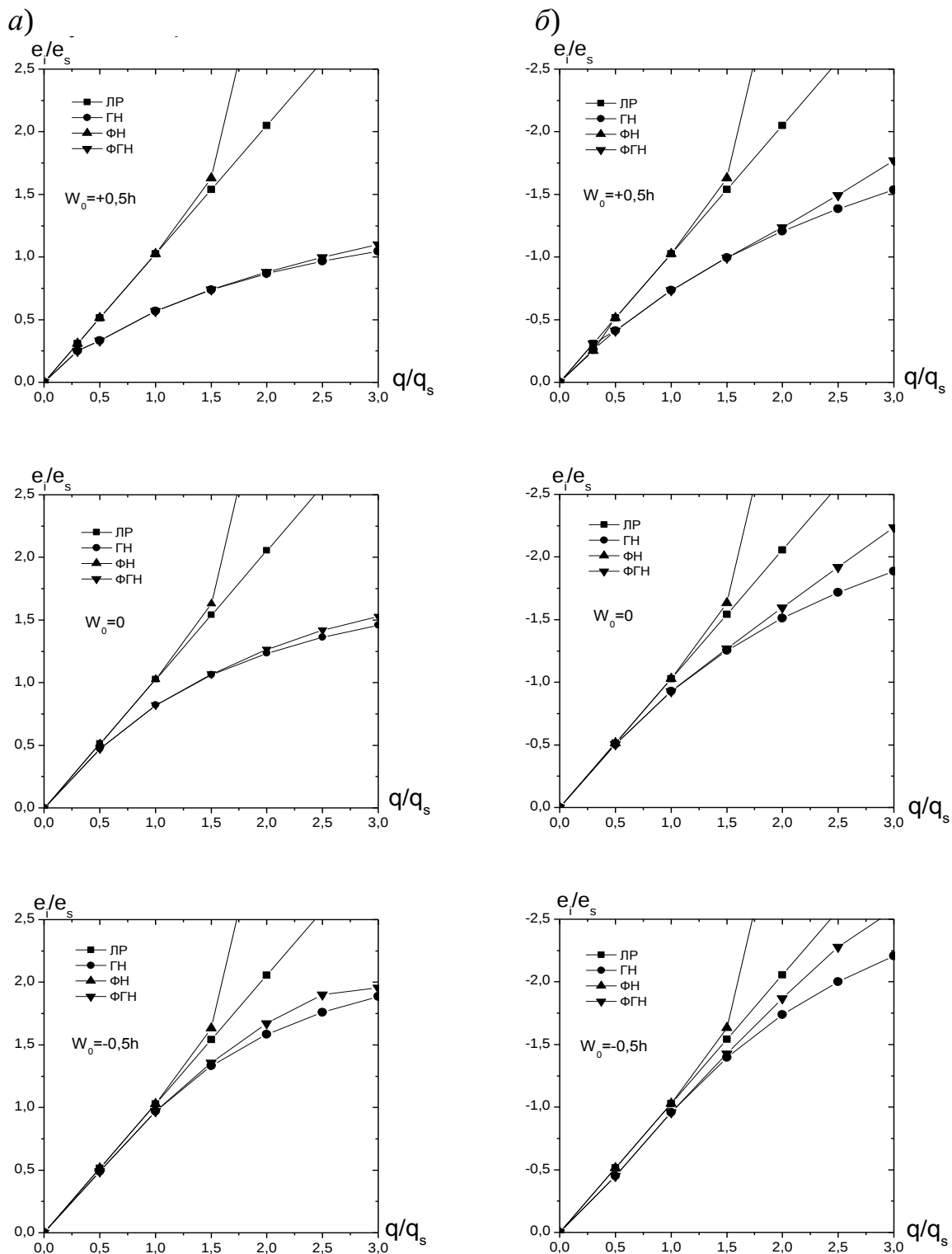


Рис. 4.7. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной h :

$a)$ в верхних волокнах центра пластины;

$b)$ в нижних волокнах центра пластины

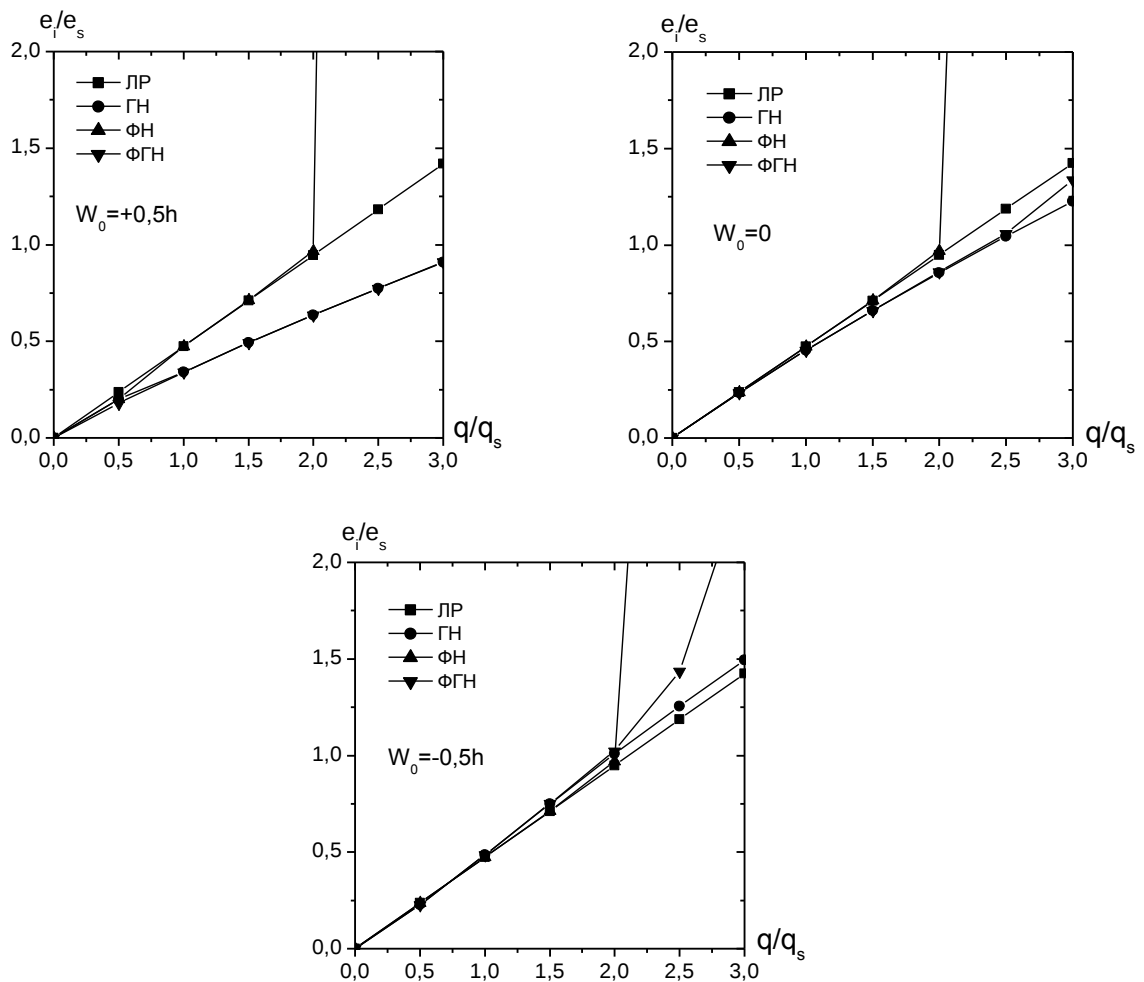


Рис. 4.8. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » для нижних волокон центра ребра пластины толщиной h

Установлено, что направление начального прогиба влияет на напряжённо-деформированное состояние. Так в рассматриваемом диапазоне нагрузки при определении перемещений пластины с отрицательным прогибом линейное решение близко к решению, получаемому при учёте физической и геометрической нелинейностей, и имеет место наибольшее отличие результатов при положительном прогибе. Так для нагрузки $1,5q_s$ ($q_s = 0,4 \text{ МПа}$) отличие составило 63% (рис. 4.5).

Это связано с тем, что при отрицательном начальном прогибе дополнительно к изгибу и сжимающим усилиям большое влияние оказывают изгибающие моменты. При положительном начальном прогибе большее влияние оказывают растягивающие усилия.

Пластические деформации раньше всего возникают при отрицательном начальном прогибе вначале в центре панели в верхних волокнах (при нагрузке $q = q_s$), затем в центре пластины в верхних и нижних волокнах (при нагрузке $q = 1,5q_s$), а потом на ребре (нагрузка начала текучести – $q = 2,05q_s$). При отсутствии начального прогиба пластические деформации сначала возникают в нижних волокнах в центре панели и пластины (при нагрузке $q = 1,4q_s$), затем в верхних волокнах в этих же точках (при нагрузке $q = 1,05q_s$) и в последнюю очередь – на ребре (при нагрузке $q = 2,4q_s$). При положительном начальном прогибе очередность возникновения пластических деформаций следующая: сначала в нижних волокнах центра панели (нагрузка – $q = 1,3q_s$), затем в нижних волокнах центра пластины (нагрузка – $q = 1,5q_s$) (рис. 4.6).

Также установлено, что линейное решение наиболее близко к решению, полученному при учёте только физической нелинейности при малой нагрузке ($q < 1,5q_s$) (рис. 4.5 – 4.7).

В рассматриваемом диапазоне нагрузок при положительном начальном прогибе и учёте физической и геометрической нелинейностей в ребре пластические деформации не возникают (рис. 4.8). Наибольшие прогибы на ребре возникают при расчёте с учётом физической нелинейности при нагрузке, превышающей нагрузку начала текучести в два раза и больше.

4.1.2. Пластина толщиной $0,7h$ (относительная толщина $0,7h/a = 1/71$)

Исследуется НДС подкреплённой ребром двухпанельной пластины, (рис. 4.1, а) [196, 240], толщина которой составляет $0,7h$.

На рис. 4.9, 4.10, 4.11 приведены эпюры приведённых прогибов W/h и приведённой интенсивности деформаций e_i/e_s пластины с начальным прогибом $W_0 = -0,5h; 0; +0,5h$ вдоль продольной оси симметрии для верхних и нижних волокон пластины в центре первой панели, в центре пластины и в ребре в зависимости от рассматриваемого вида нелинейности. Величины прогибов и

интенсивности деформаций приведены при нагрузке $q = 0,4 \text{ МПа}$, превышающей нагрузку начала текучести в 2 раза ($q_s = 0,2 \text{ МПа}$).

Анализируются прогибы и интенсивности деформаций, полученные с учётом физической и геометрической нелинейностей, при сравнении их с линейным решением, и решениями, полученными при отдельном учёте физической и геометрической нелинейностей (рис. 4.9, 4.10, 4.11).

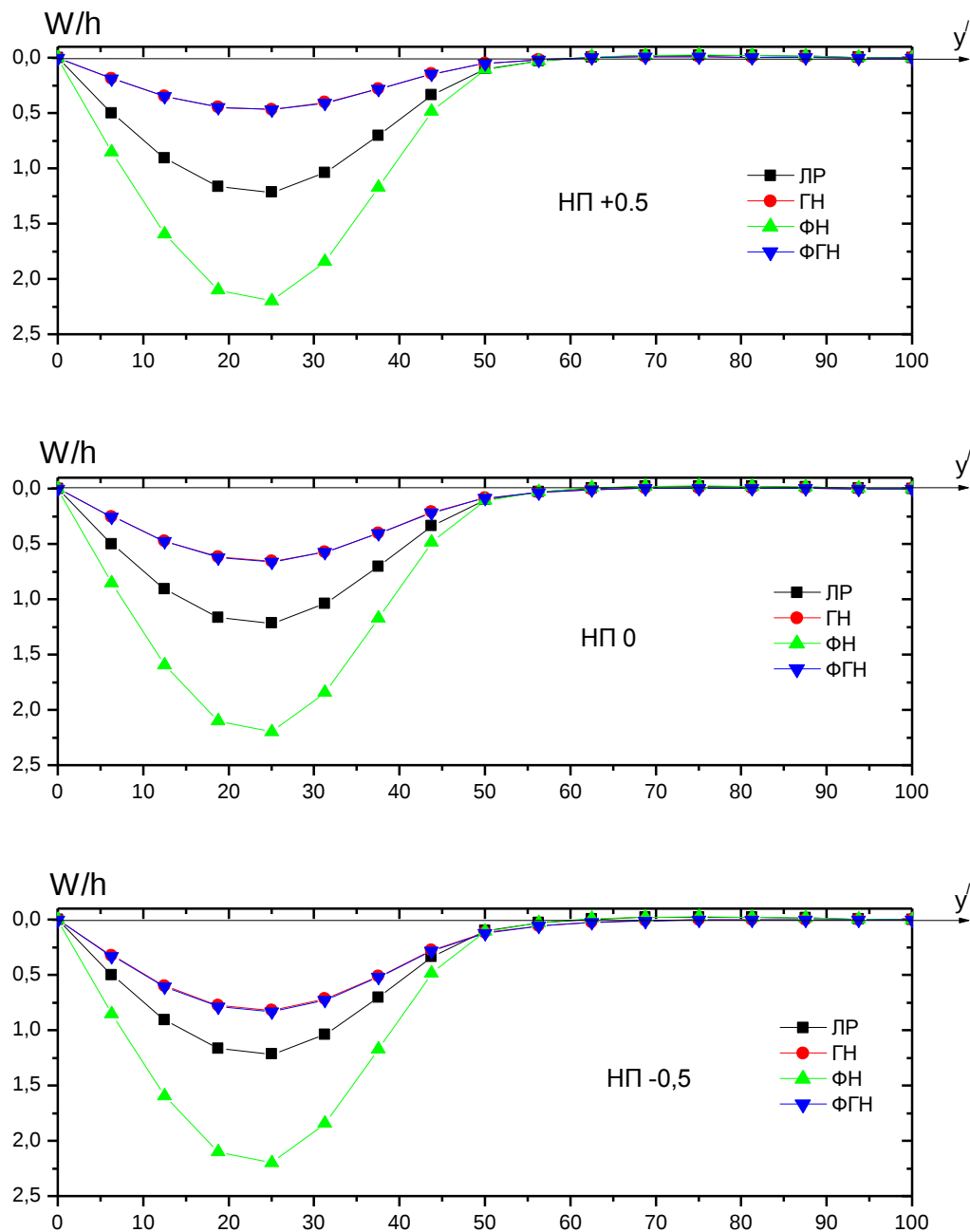


Рис. 4.9. Эпюры приведённых прогибов W/h по оси симметрии пластины толщиной $0,7h$ при нагрузке $q = 2q_s$

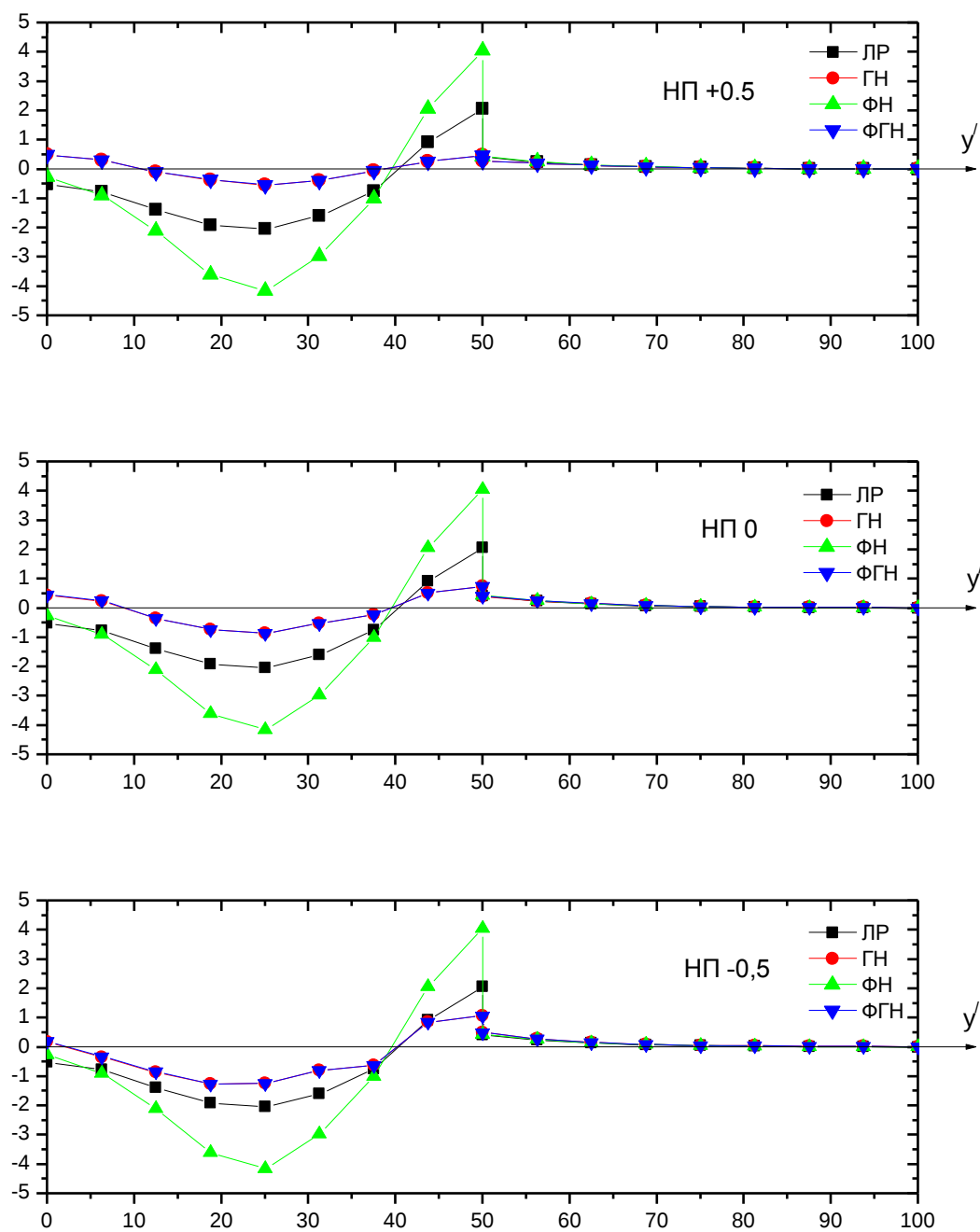


Рис. 4.10. Эпюры приведенной интенсивности деформаций e_i / e_s для верхних волокон по оси симметрии пластины толщиной $0,7h$ при нагрузке $q = 2q_s$

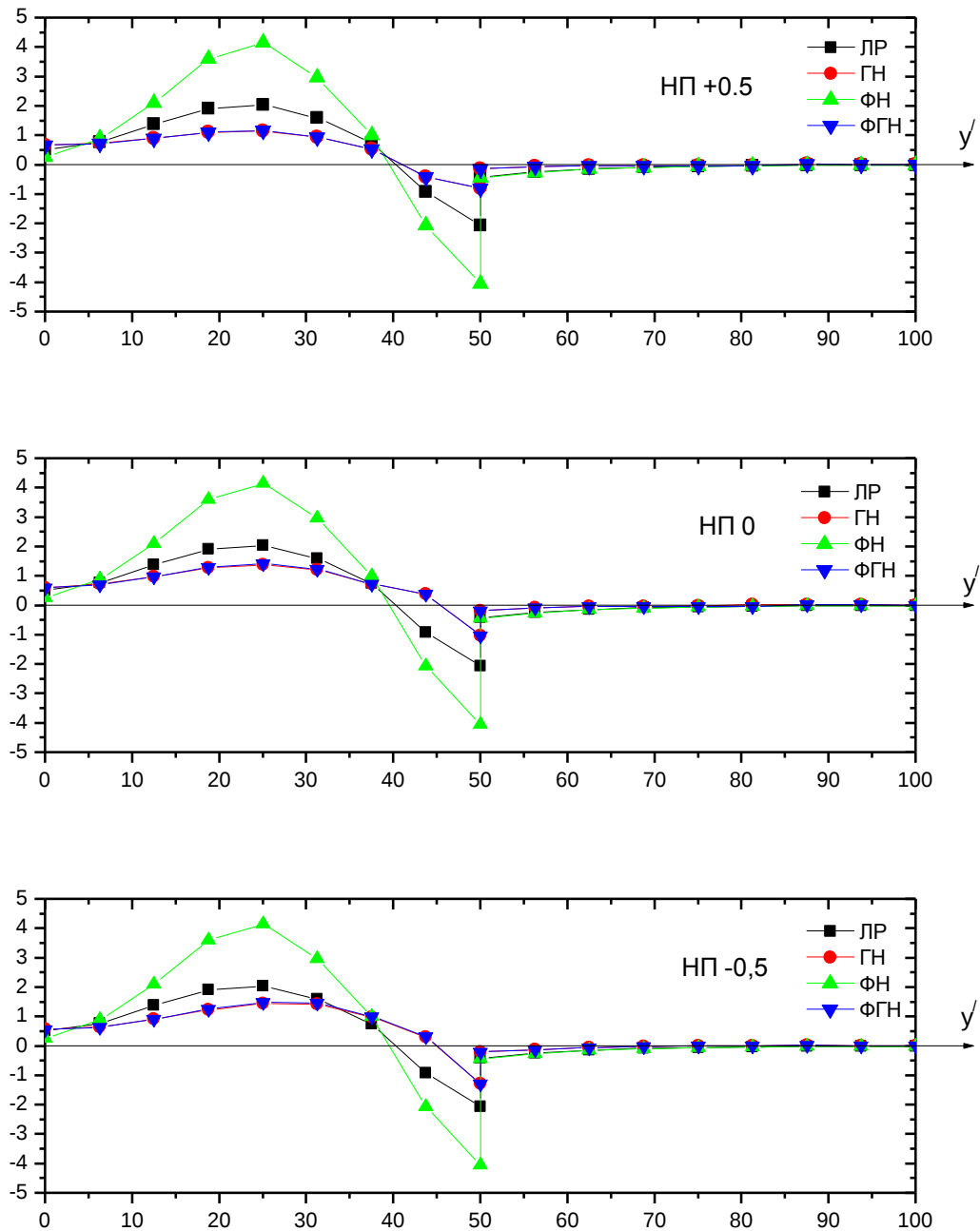


Рис. 4.11. Эпюры приведенной интенсивности деформаций e_i / e_s
для нижних волокон по оси симметрии пластины
толщиной $0,7h$ при нагрузке $q = 2q_s$

Анализ представленных результатов указывает на то, что наибольшие прогибы возникают в центре левой панели с отрицательным начальным прогибом (рис. 4.9), которая находится под действием равномерной нагрузки. Наибольшие прогибы возникают при расчёте с учётом физической нелинейности и более чем в два раза превышают прогибы, полученные при учёте физической и геометрической нелинейностей. Линейное решение наиболее близ-

ко к решению, полученному при учёте двойной нелинейности (физической и геометрической) с отрицательным начальным прогибом. Максимальное отличие составило 65%. Решения с учётом только геометрической и двойной нелинейности отличаются в пределах 2–5 %, что свидетельствует о значительном влиянии мембранных усилий.

В центре пластины отмечается скачок интенсивности деформаций (рис. 4.10, 4.11), что связано с несимметричным приложением нагрузки и влиянием ребра.

Результаты расчётов, полученные с учётом только геометрической и двойной нелинейностей, отличаются от линейного решения в пределах 3–5 % (рис. 4.10). Это связано с тем, что правая панель не имеет больших прогибов и в ней не возникают пластические деформации.

Наибольшие деформации возникают на нижней поверхности в центре левой панели, центре пластины и на ребре (рис. 4.10, 4.11). Для указанных точек построены графики зависимости приведённых прогибов и приведенной интенсивности деформаций от нагрузки (рис. 4.12-4.14).

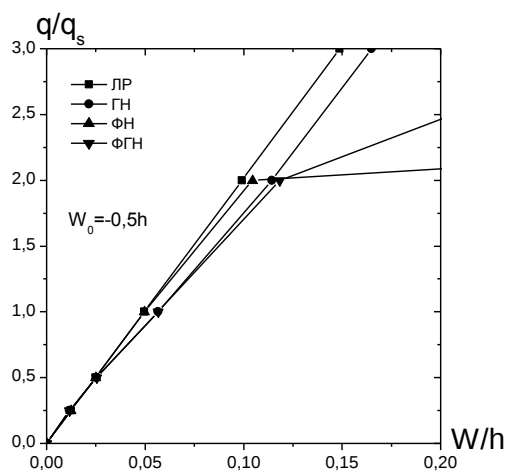
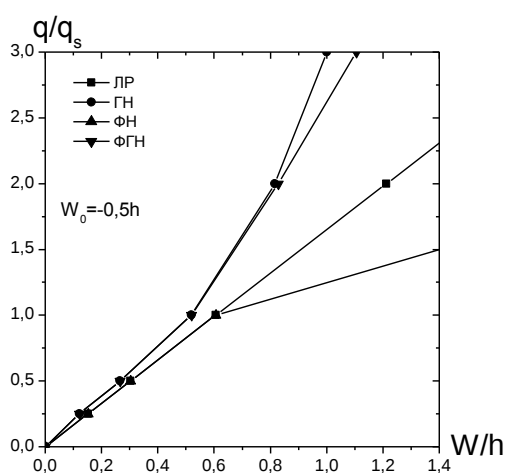
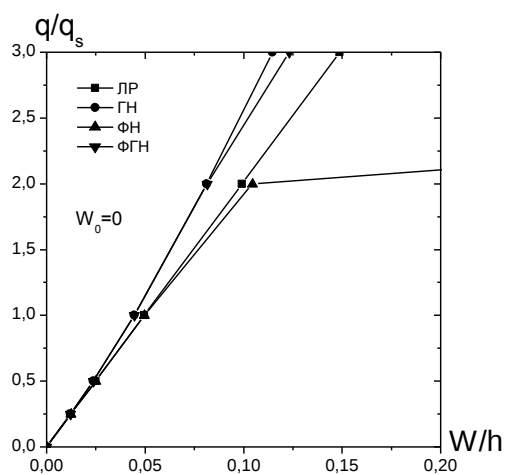
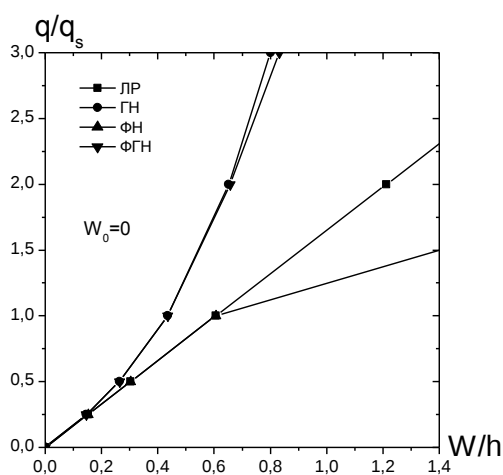
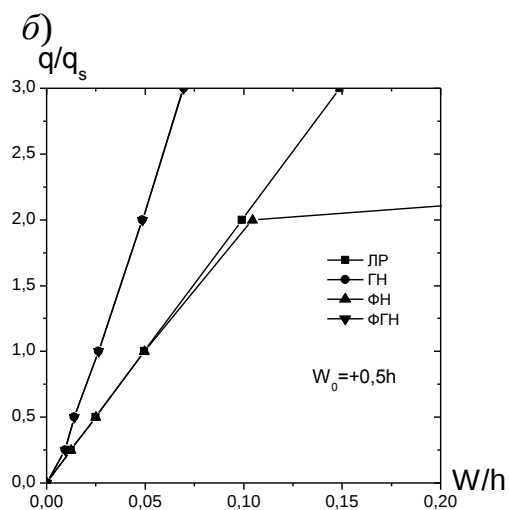
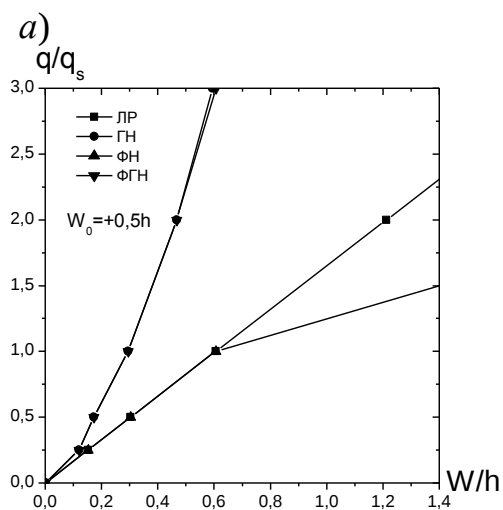


Рис. 4.12. Графики зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » пластины толщиной $0,7h$:
а) в центре левой панели; б) в центре пластины

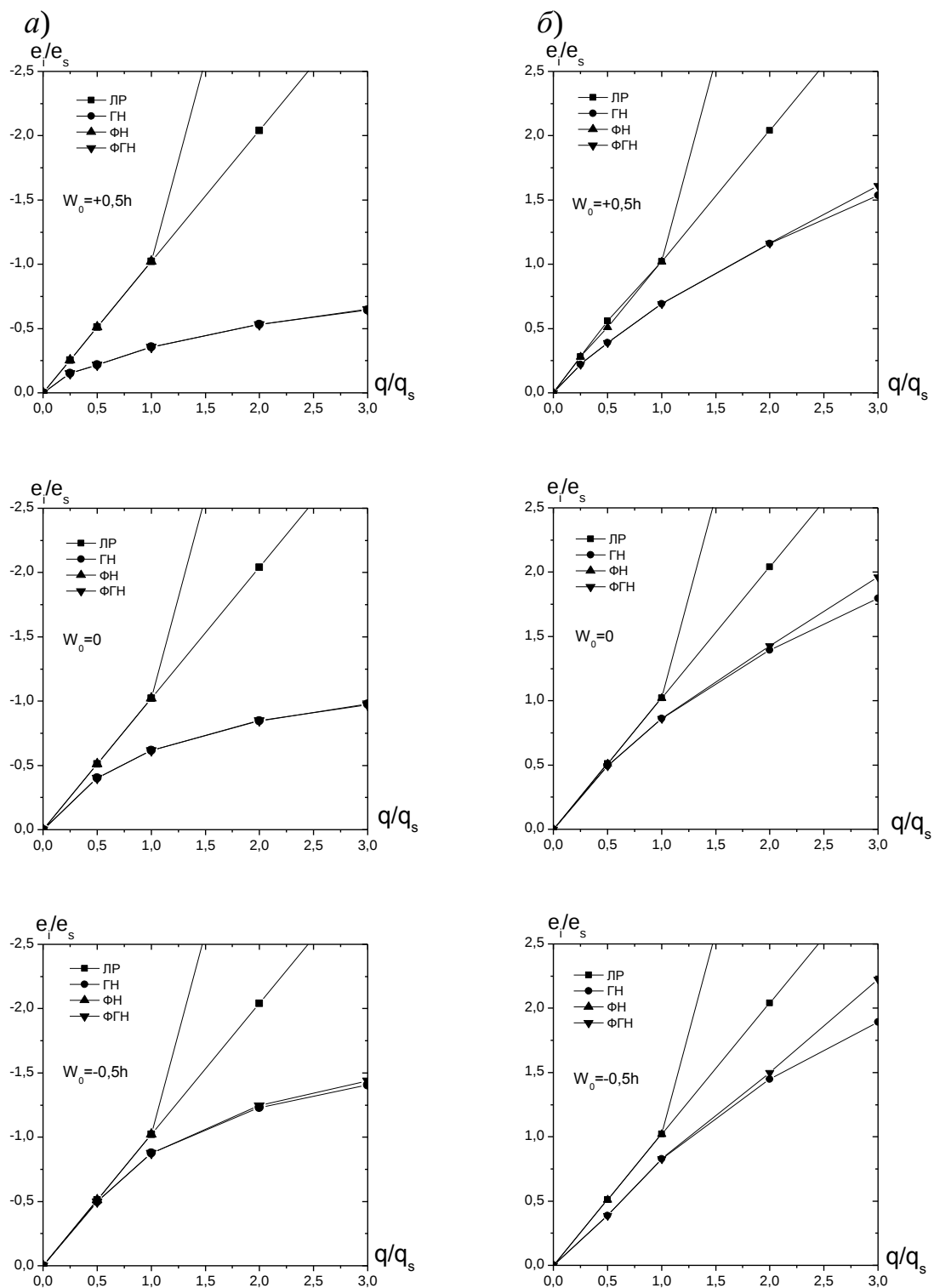


Рис. 4.13. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной $0,7h$:

a) в верхних волокнах центра левой панели;

б) в нижних волокнах центра левой панели

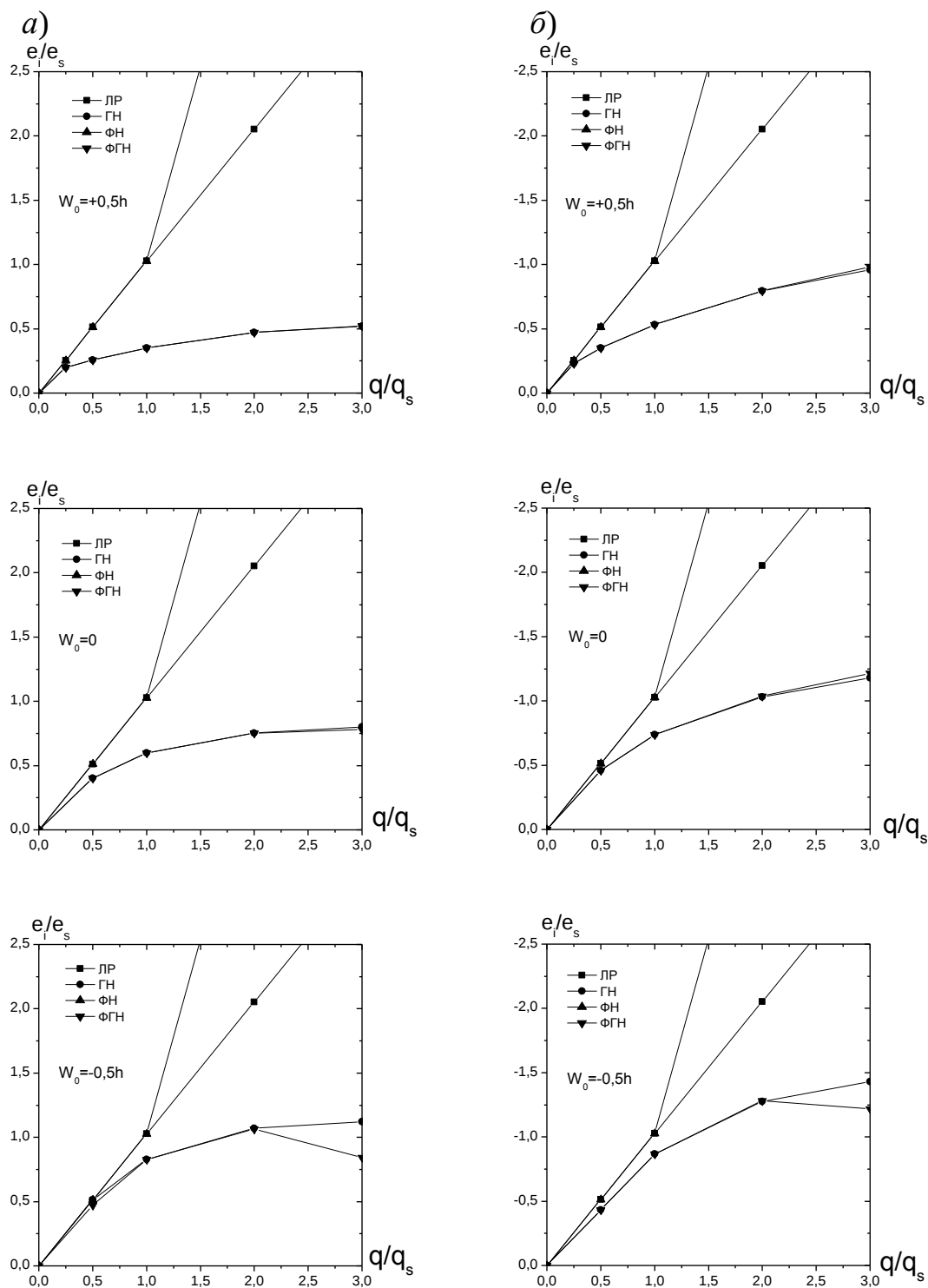


Рис. 4.14. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной $0,7h$:

а) в верхних волокнах центра пластины;

б) в нижних волокнах центра пластины

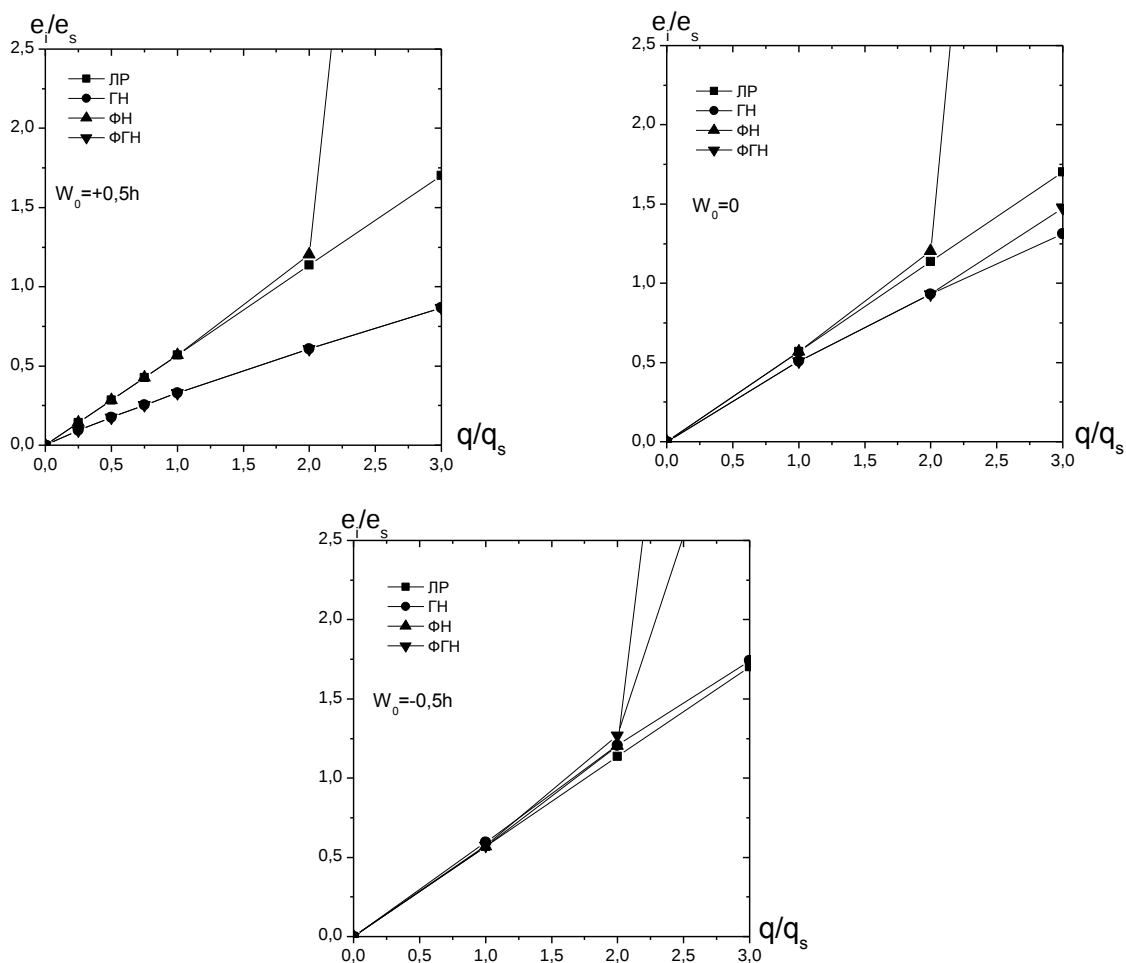


Рис. 4.15. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » для нижних волокон ребра пластины толщиной $0,7h$

Направление начального прогиба пластины толщиной $0,7h$ влияет на величины дополнительных прогибов и интенсивности деформаций пластины в зависимости от величины нагрузки. Пластические деформации при положительном начальном прогибе в верхних волокнах пластины и при его отсутствии не возникают. При отрицательном начальном прогибе пластические деформации сначала возникают вначале на нижних волокнах в центре панели (при $q = 1,2q_s$, $q_s = 0,2 \text{ МПа}$), затем в центре пластины (при $q = 1,4q_s$), а потом на ребре (при $q = 1,6q_s$) (рис. 4.13-4.15).

Решение, полученное в линейной постановке до момента начала текучести, близко к решению с учётом двойной нелинейности (физической и геометрической) при отрицательном прогибе при нагрузке $q < q_s$ (рис. 4.12, 4.13, 4.15). Наибольшее отличие линейного решения по прогибам и интен-

сивности деформаций от решения, полученного при одновременном учёте физической и геометрической нелинейностей, наблюдается при положительном начальном прогибе. Всё это обусловлено влиянием сжимающих усилий при отрицательном начальном прогибе и преобладанием влияния изгибающих моментов. При положительном начальном прогибе сказывается влияние растягивающих усилий.

При нагрузке до $2q_s$ величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние пластины, полученные при учёте геометрической нелинейности и одновременном учёте физической и геометрической нелинейностей, отличаются между собой незначительно. В центре пластины для нагрузки $q = 2,5q_s$ при отрицательном начальном прогибе наблюдается разгрузка сжатых волокон (рис. 4.14). Причиной этого является превалирование положительных мембранных составляющих напряжений над отрицательными изгибными составляющими напряжений.

В зависимости от знака начального прогиба в рассматриваемом диапазоне нагрузок пластические деформации на ребре возникают при разной нагрузке. При положительном начальном прогибе пластические деформации не возникают, так как сказывается влияние продольных усилий и уменьшение влияния изгибающих моментов, возникающих при действии нагрузки на пластину. В пластине без начального прогиба пластические деформации появляются при нагрузке $q = 2,1q_s$, при отрицательном начальном прогибе – при $q = 1,6q_s$ (рис. 4.15). Увеличивается влияние момента. Кроме того, сказывается влияние сложного распределения деформаций по полю пластины.

4.1.3. Пластина толщиной $1,5h$ (относительная толщина $1,5h/a = 1/33$)

В данном параграфе представлен анализ результатов расчёта пластины толщиной $1,5h$ с максимальным начальным прогибом $W_0 = -0,5h; 0; +0,5h$ в центре пластины (рис. 4.1, а) [239, 240].

На рис. 4.16, 4.17, 4.18 приведены эпюры прогибов (W/h) и интенсив-

ности деформаций (e_i / e_s) для верхних и нижних волокон по оси симметрии пластины при учёте физической и геометрической нелинейностей и рассматриваемого начального прогиба при нагрузке, превышающей нагрузку начала текучести в 1,5 раза ($q = 1,5q_s$, $q_s = 1 \text{ МПа}$).

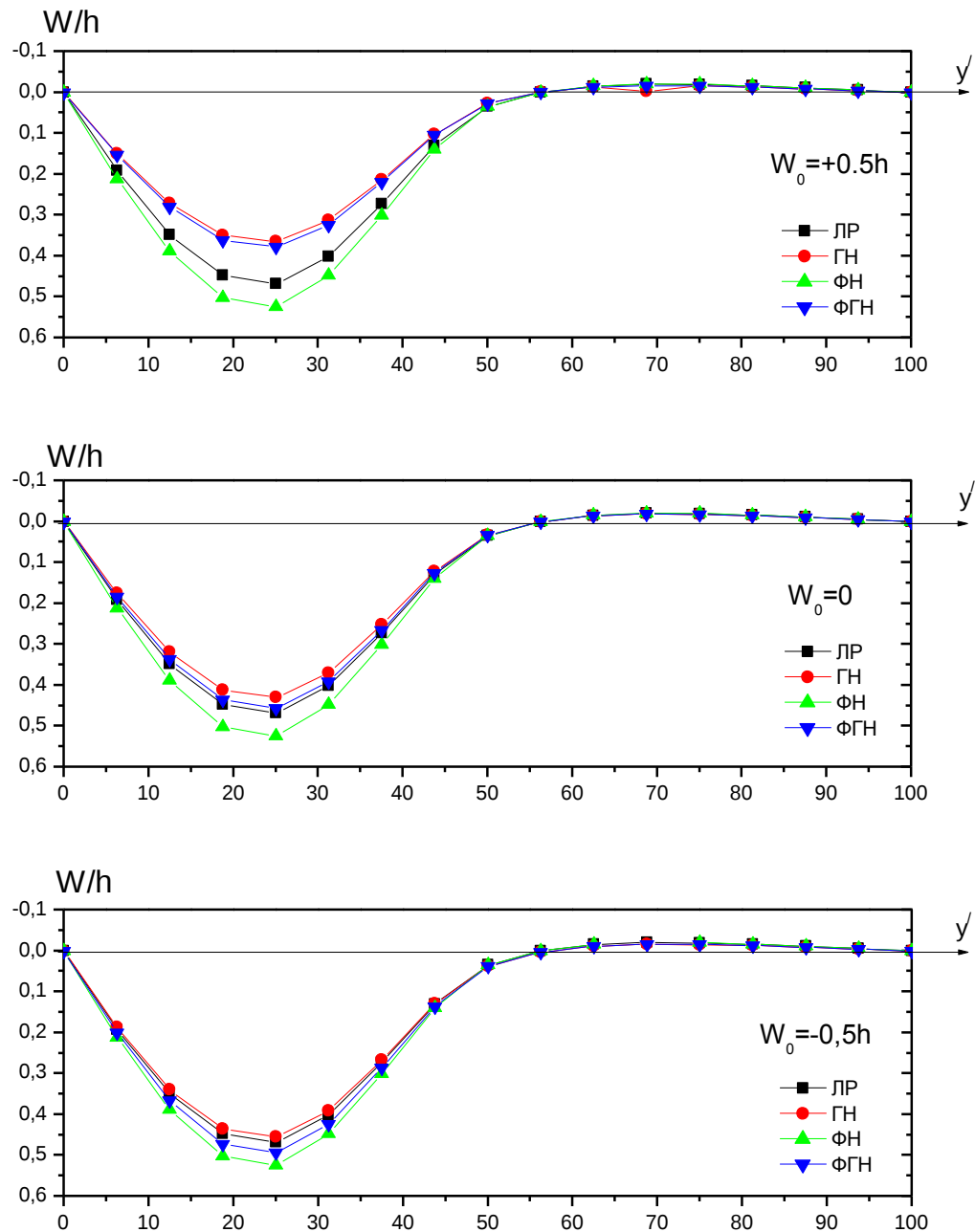


Рис. 4.16. Эпюры приведённых прогибов W/h по оси симметрии пластины толщиной $1,5h$ при нагрузке $q = 1,5q_s$

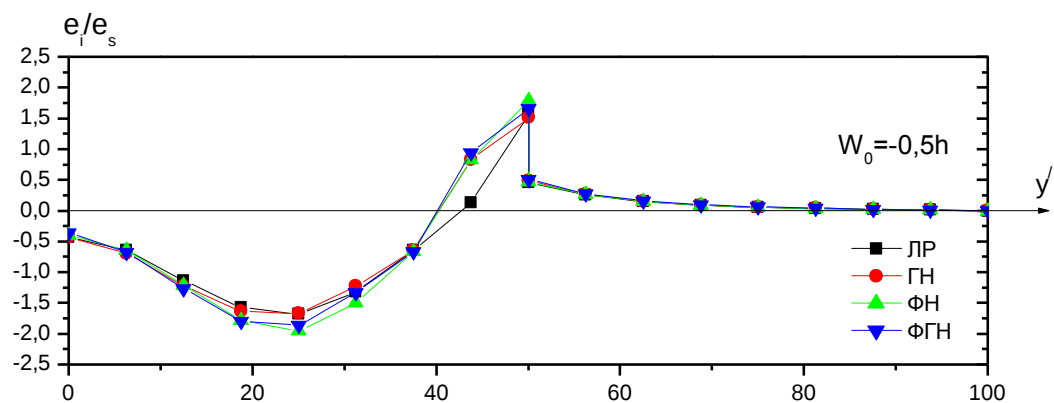
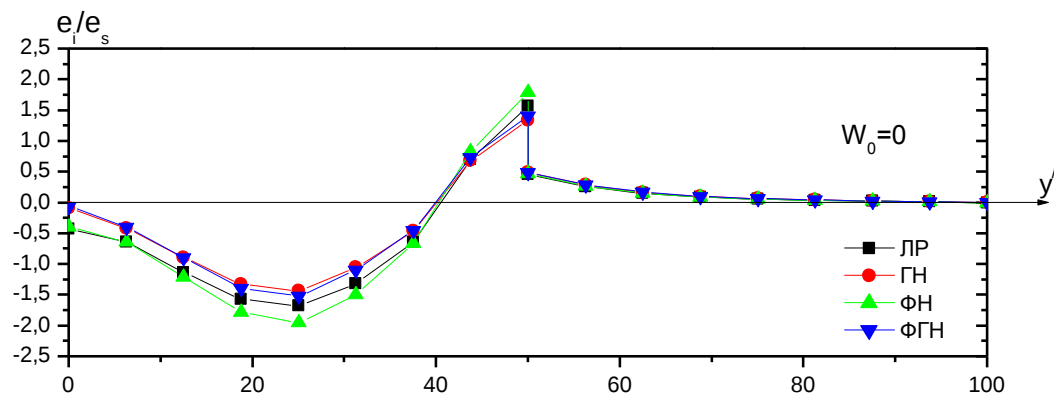
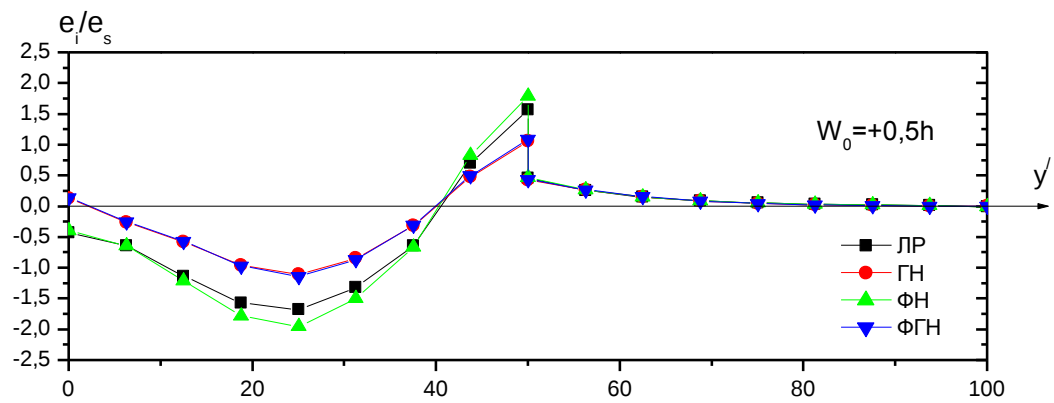


Рис. 4.17. Эпюры приведенной интенсивности деформаций для верхних волокон по оси симметрии пластины толщиной $1,5h$ при нагрузке $q = 1,5q_s$

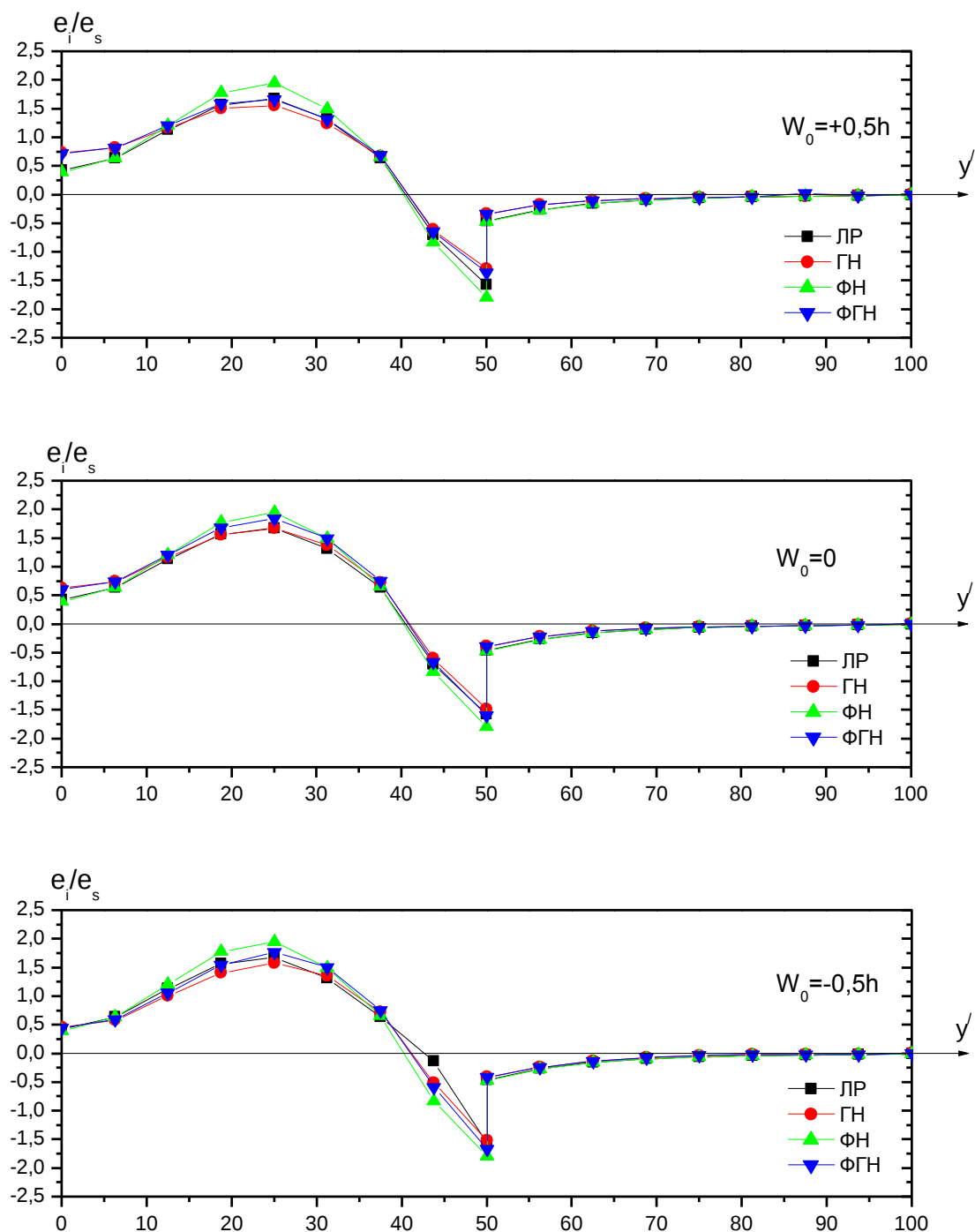


Рис. 4.18. Эпюры приведенной интенсивности деформаций для нижних волокон по оси симметрии пластины толщиной $1,5h$ при нагрузке $q = 1,5q_s$

Прогибы в центре нагруженной панели (рис. 4.16) при положительном начальном прогибе при учёте физической нелинейности отличаются от значений, полученных с одновременным учётом физической и геометрической нелинейностей на $0,15h$ (на 40%). Линейное решение наиболее близко к решению с учётом физической и геометрической нелинейностей при отсутствии

начального прогиба. Так максимальное отличие прогибов пластины при положительном начальном прогибе составило 25%. Результаты расчёта, полученные при учёте только геометрической нелинейности и двойной нелинейности (физической и геометрической) отличаются на 3-5 % независимо от знака начального прогиба (рис. 4.16).

Отмечается скачок интенсивности деформации в центре пластины толщиной $1,5h$ (рис. 4.17, 4.18), как и в пластинах толщиной $0,7h$ и h . Значения приведённой интенсивности деформации e_i/e_s , полученные с учётом геометрической нелинейности и двойной нелинейности, отличаются незначительно, в пределах 3-5 %. Прогибы и интенсивность деформаций второй ненагруженной панели близки по величине к результатам, полученным при линейном решении.

Наибольшее значение интенсивности деформаций наблюдается в центре левой панели, центре пластины и на ребре (рис. 4.17, 4.18). Для указанных точек построены графики зависимости «прогиб - нагрузка» – « $\bar{W} - \bar{q}$ », «интенсивность деформаций - нагрузка» – « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » (рис. 4.19 - 4.22).

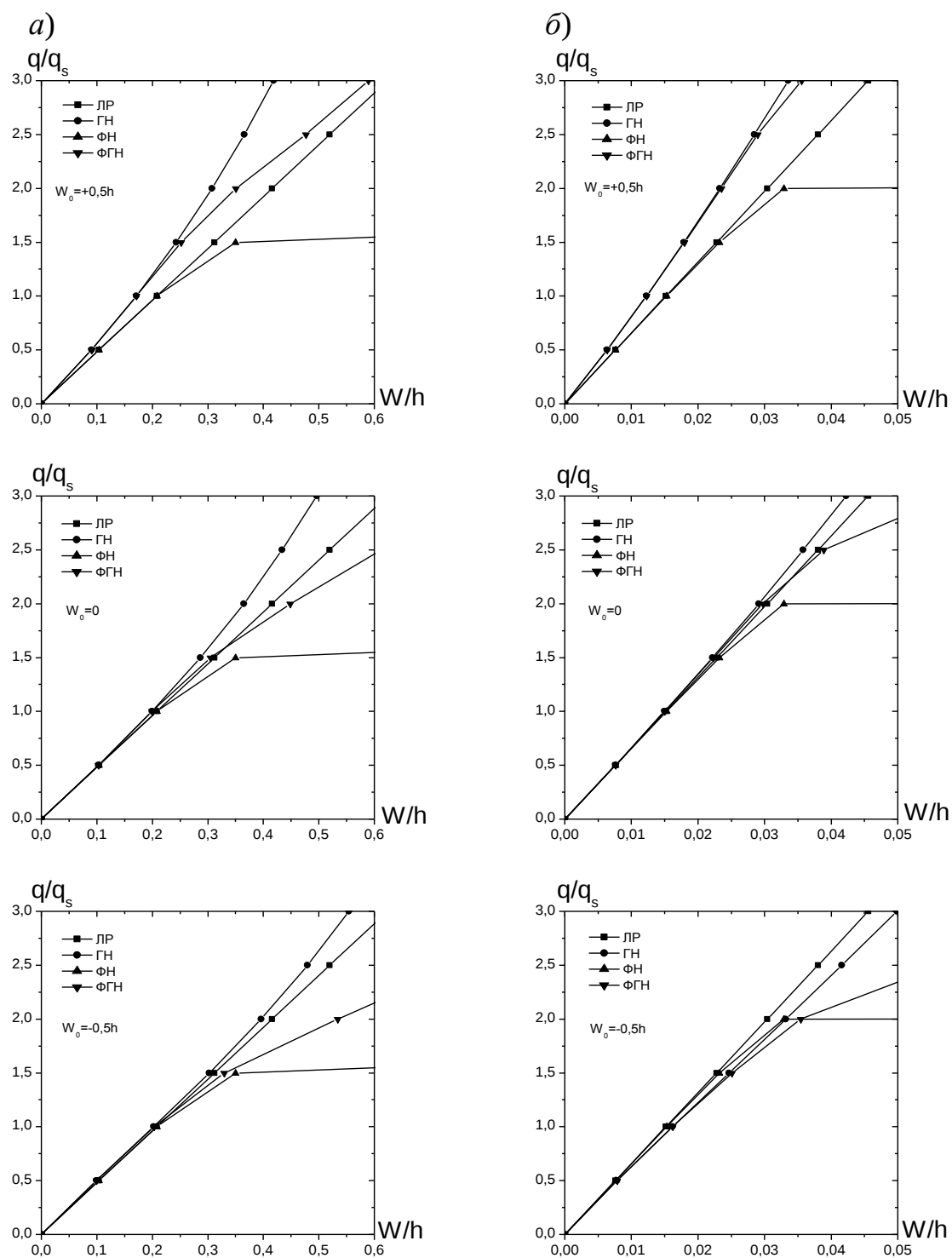


Рис. 4.19. Графики зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » пластины толщиной $1,5h$:
 а) в центре левой панели; б) в центре пластины

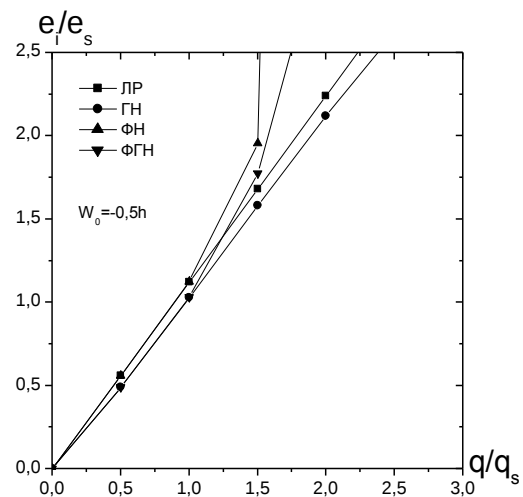
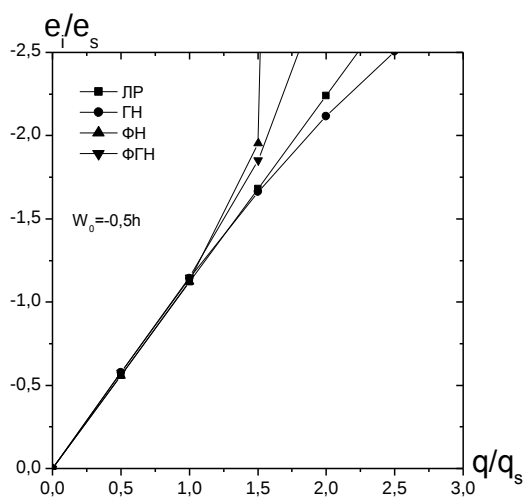
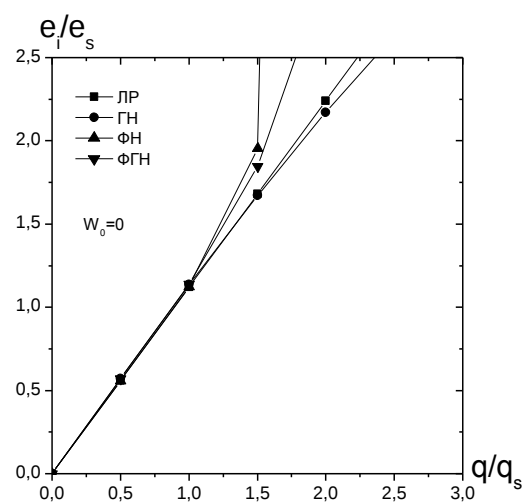
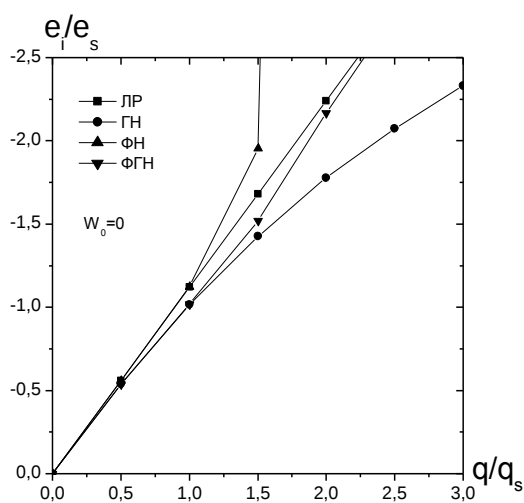
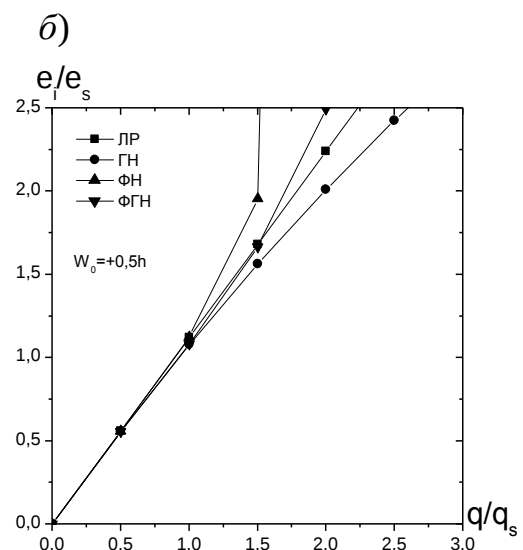
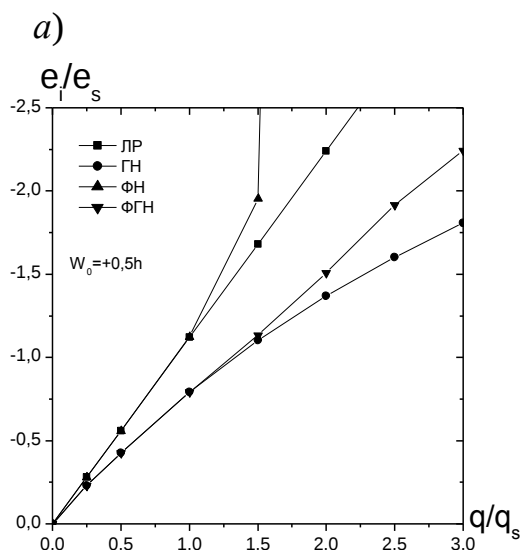


Рис. 4.20. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной $1,5h$:

а) в верхних волокнах центра левой панели;

б) в нижних волокнах центра левой панели

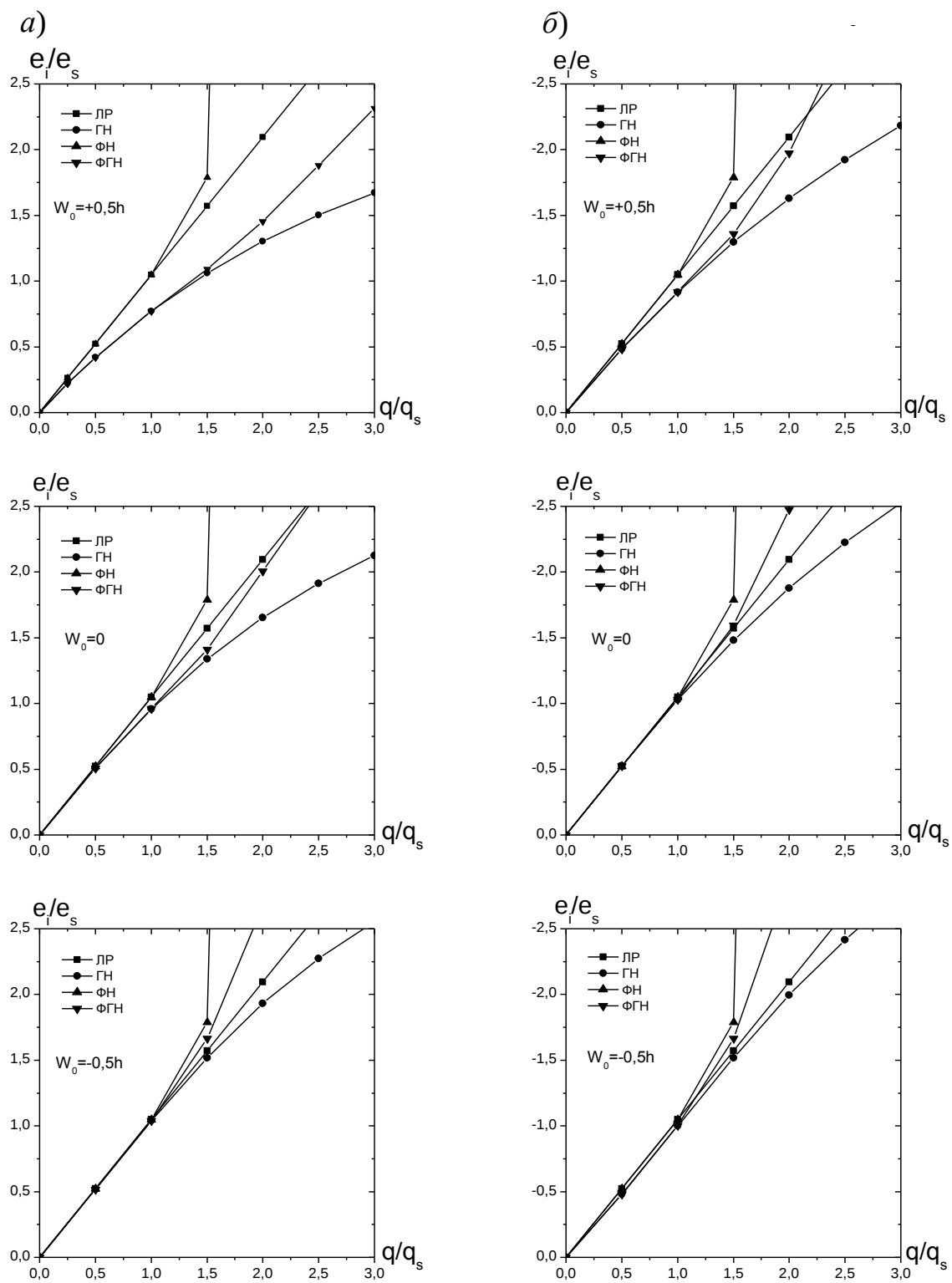


Рис. 4.21. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины толщиной $1,5h$:

а) в верхних волокнах центра пластины;

б) в нижних волокнах центра пластины

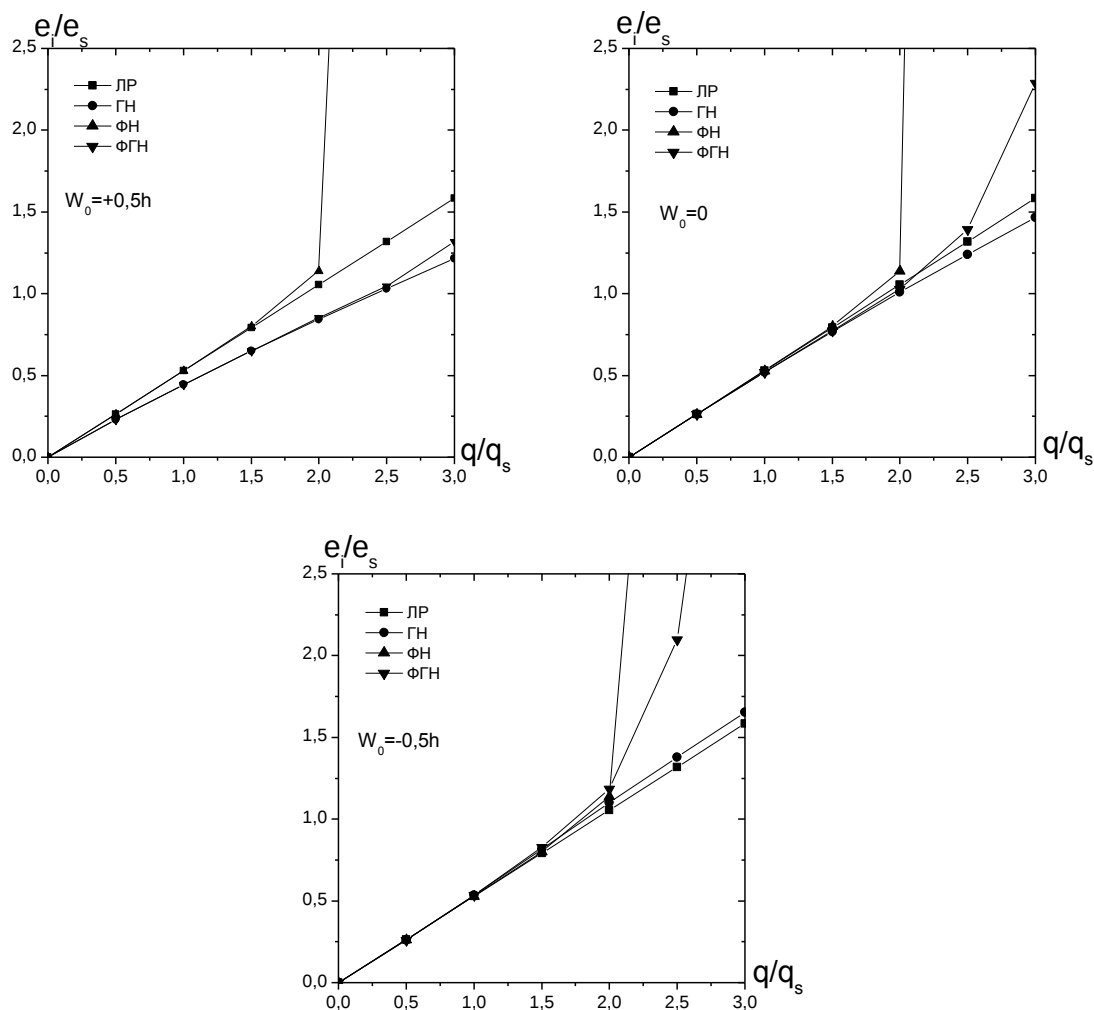


Рис. 4.22. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » для нижних волокон центра ребра пластины толщиной $1,5h$

Последовательность возникновения пластических деформаций определяется согласно зависимости приведённой интенсивности деформаций от приведённой нагрузки — « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » (рис. 4.20-4.22). В пластине с отрицательным начальным прогибом пластические деформации возникают вначале в центре панели на верхних волокнах (при $q = 0,8q_s$, $q_s = 1\text{МПа}$), затем одновременно в верхних волокнах в центре панели и центре пластины (при $q = q_s$), и в последнюю очередь на ребре (при $q = 2,5q_s$). Линейное решение до начала текучести материала пластины при отрицательном начальном прогибе наиболее близко к решениям, полученным с учётом нелинейностей. В этом случае погрешность в пределах 3-5%. При положительном начальном прогибе между линейным и нелинейными решениями отмечается расхождение, т.к. сказывается влияние растягивающих усилий в пластине.

Направление начального прогиба влияет на величину прогибов и интенсивность деформаций. Так, при учёте двойной нелинейности в центре первой панели при нагрузке $q = 2q_s$ наибольший прогиб ($W = 0,53h$) возникает при отрицательном начальном прогибе, а наименьший прогиб ($W = 0,35h$) – при положительном начальном прогибе (рис. 5.19). Аналогичный характер носит изменение интенсивности деформаций (рис. 4.20, 4.21). В отличие от более тонких пластин геометрически нелинейное решение значительно отличается от решения с одновременным учётом физической и геометрической нелинейностей при нагрузке больше нагрузки начала текучести.

В зависимости от знака начального прогиба в рассматриваемом диапазоне нагрузок пластические деформации ребра возникают при разных нагрузках: максимальная величина приведённой нагрузки $\bar{q} = 2,5$ – при положительном начальном прогибе, минимальная $\bar{q} = 1,75$ – при отрицательном прогибе.

Величины, характеризующие НДС пластины, зависят от направления начального прогиба и вида нелинейности (рис. 4.20, 4.21). При положительном начальном прогибе решение с учётом физической и геометрической нелинейностей находится между линейным решением и решением с учётом геометрической нелинейности. При отсутствии начального прогиба ($W_0 = 0$) решение с учётом физической и геометрической нелинейностей близко к линейному решению, а при отрицательном начальном прогибе – наиболее близко к решению с учётом физической нелинейности (рис. 4.20-4.21).

4.1.4. Сравнительный анализ влияния начального прогиба, физической и геометрической нелинейностей на напряжённо-деформированное состояние ребристых пластин

Проведён анализ результатов расчёта напряжённо-деформированного состояния пластин, выполненных из материала Ст3, на действие несимметричной поперечной равномерно распределённой нагрузки при разном начальном прогибе центра пластины. Рассматривались пластины размером в

плане $a \times b = 50 \times 50$ (см) толщиной: $0,7h$; h ; $1,5h$ ($h = 1$ см) подкреплённые в центре ребром (рис. 4.1). Расчёт проводился в линейной и нелинейной постановках (с учётом физической, геометрической нелинейностей и с совместным учётом физической и геометрической нелинейностей).

За основную величину, характеризующую жёсткость пластины, взят прогиб W . За величину, характеризующую прочность – интенсивность деформаций e_i .

Представленные графики зависимости приведённого дополнительного прогиба от приведённой нагрузки – « $\bar{W} - \bar{q}$ » и приведённой интенсивности деформаций от приведённой нагрузки – « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » для центра левой панели, центра пластины и подкрепляющего ребра, полученные при разных значениях начального прогиба, характеризуют общее напряженно-деформированное состояние пластины.

Сравнение линейного решения и решения с учётом физической и геометрической нелинейностей до предела текучести материала

В таблицах 4.1 и 4.2 приведено сравнение результатов линейного решения в процентном соотношении к нелинейному (с учётом геометрической нелинейности) решению при нагрузке начала текучести $q = q_s$ по прогибам (табл. 4.1) и интенсивности деформаций (табл. 4.2) центра панели и центра пластины.

Таблица 4.1

Сравнение по прогибам W/h (%)

Толщина пластины	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$
	Центр левой панели		
$0,7h$	16,5	39,5	106
h	5,9	13,8	49,4
$1,5h$	2,5	4,1	21,2
	Центр пластины		
$0,7h$	12,5	11,7	88,6
h	8,5	2,8	48,5
$1,5h$	6,2	1,3	23,8

Таблица 4.2

Сравнение по интенсивности деформаций e_i / e_s (%)

Толщина пластины	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$
	Центр панели					
	Верхние волокна			Нижние волокна		
$0,7h$	16,2	65	186,6	23,2	18,2	47,7
h	2,7	25,6	87,6	13,3	3,1	18,3
$1,5h$	2,4	10	41,1	8,7	1,7	3,6
	Центр пластины					
	Верхние волокна			Нижние волокна		
$0,7h$	24	71,8	192,6	18,1	39,2	93,5
h	5,9	25,1	80,8	7,2	10,7	39,5
$1,5h$	0,7	9,2	36	4,5	1,8	14,2

При нагрузке $q = q_s$ в пластине толщиной $1,5h$ максимальное отличие (6,2 %) по прогибам нелинейного решения от линейного наблюдается при отрицательном начальном прогибе $W_0 = -0,5h$. При положительном начальном прогибе $W_0 = +0,5h$ максимальное различие результатов составляет 23,8 %. Без учёта начального прогиба отличие нелинейного решения от линейного составило максимум 4,1 % (табл. 4.1).

Интенсивность деформаций, характеризующая деформированное состояние, показывает максимальное различие результатов (192,6 %) при толщине пластины $0,7h$.

С уменьшением толщины пластин (h и $0,7h$) различие между результатами расчётов между линейным решением и решением с учётом геометрической нелинейности возрастает.

С увеличением толщины пластины при отрицательном начальном прогибе погрешность линейных расчётов уменьшается. Так при $W_0 = -0,5h$ и толщине пластины $1,5h$ максимальное отличие равно 8,7 % (табл. 4.2).

Сравнение геометрически нелинейного решения и решения с учётом физической и геометрической нелинейностей

В табл. 4.3 и 4.4 приведено сравнение результатов геометрически нелинейного решения в процентном отношении к решению, учитывающему фи-

зическую и геометрическую нелинейности при нагрузке $q = 2q_s$ по прогибам (табл. 4.3) и интенсивности деформаций (табл. 4.4) центра панели и центра пластины.

Таблица 4.3

Сравнение по прогибам W/h (%)

Толщина пластины	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$
	Центр панели		
$0,7h$	1,5	0,8	0,1
h	6,2	4	1,9
$1,5h$	25,8	18,7	12,2
	Центр пластины		
	$0,7h$	3,3	0,01
	h	1,5	0,5
	$1,5h$	6,2	2

Для пластин толщиной $0,7h$ и h прогибы центра пластины и центра панели, полученные при учёте геометрической нелинейности и с учётом физической и геометрической нелинейностей, различаются незначительно. Максимальное различие – 6,2 % при отрицательном начальном прогибе. Исключение составляет пластина толщиной $1,5h$. В центре нагруженной панели данной пластины наблюдается увеличение между указанными решениями от 12,2 % при положительном начальном прогибе до 25,8 % при отрицательном прогибе.

Таблица 4.4

Сравнение по интенсивности деформаций e_i/e_s (%)

Толщина пластины	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$	$W_0 = -0,5h$	$W_0 = 0$	$W_0 = +0,5h$
	Центр панели					
	Верхние волокна			Нижние волокна		
$0,7h$	1,1	0,3	0,01	3,5	2,2	0,01
h	6,9	2,5	0,7	10,7	7,9	4,2
$1,5h$	27,9	18,03	9,1	35,2	27,9	19,3
	Центр пластины					
	Верхние волокна			Нижние волокна		
	$0,7h$	0,5	0,01	0,01	0,5	0,01
h	5,2	2,3	1,2	6,9	5,2	2,3
$1,5h$	27,6	17,5	10,4	30,7	24,1	17,4

Хорошее совпадение результатов наблюдается и по интенсивности деформаций пластин толщиной $0,7h$ и h , полученных при учёте геометрической нелинейности и при учёте физической и геометрической нелинейностей при нагрузке $q = 2q_s$ (табл. 4.4). Максимальное различие результатов – 10,7 % при отрицательном начальном прогибе и минимальное различие при положительном начальном прогибе – 0,01 %. Наибольшее различие величин интенсивности деформаций, полученных при учёте геометрической нелинейности и при одновременном учёте физической и геометрической нелинейностей, получено для пластин толщиной $1,5h$. Минимальное различие – 9,1 % в верхних волокнах центра панели при положительном начальном прогибе и максимальное – 35,2 % в нижних волокнах центра панели при отрицательном начальном прогибе. Отметим, что наиболее близкие результаты для интенсивности деформаций наблюдаются при положительном начальном прогибе, наибольшее расхождение – при отрицательном.

Анализ влияния начального прогиба при расчёте пластин толщиной $0,7h$; h ; $1,5h$ с одновременным учётом физической и геометрической нелинейностей.

Анализ проводился при толщине пластины $h = 1\text{ см}$ и длине пластины 100 см величина начального прогиба равна $0,5h$, то есть половине толщины пластины.

На рис. 4.23 изображены графики зависимости дополнительного приведённого прогиба от приведённой нагрузки « $\bar{q} - \bar{W}$ » центра нагруженной панели и центра пластины при положительном, отрицательном начальном прогибах и их отсутствии.

На рис. 4.24 представлена эпюра дополнительных приведённых прогибов центра левой панели пластин толщиной $0,7h$; h ; $1,5h$ с начальным прогибом $W_0 = +0,5h, 0, -0,5h$, нагруженной несимметричной нагрузкой $q = q_s$.

На рис. 4.25 и 4.26 представлены эпюры суммарных приведённых прогибов пластин разной толщины $0,7h$; h ; $1,5h$ с начальным прогибом $W_0 = +0,5h, 0, -0,5h$ при несимметричной нагрузке $q = q_s$.

На рис. 4.27, 4.28 представлены графики зависимости приведённой интенсивности деформаций от приведённой нагрузки « $\bar{e}_i - \bar{q}$ », полученные при учёте физиче-

ской и геометрической нелинейностей для верхних и нижних волокон центра панели (рис. 4.27) и центра пластины (рис. 4.28) в зависимости от знака начального прогиба.

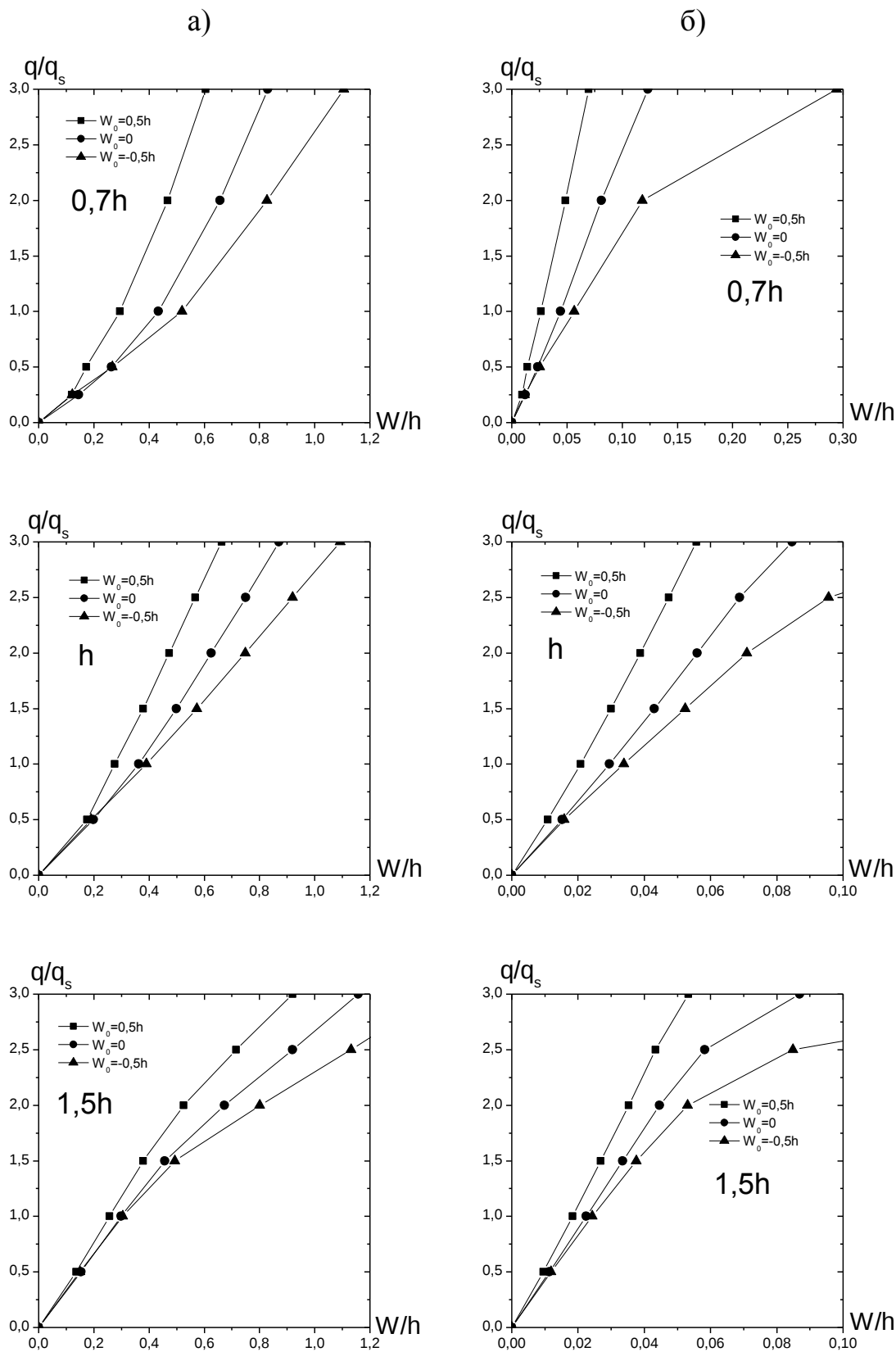


Рис. 4.23. Графики зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » пластин, полученные при учёте физической и геометрической нелинейностей
а) центра нагруженной панели; б) центра пластины

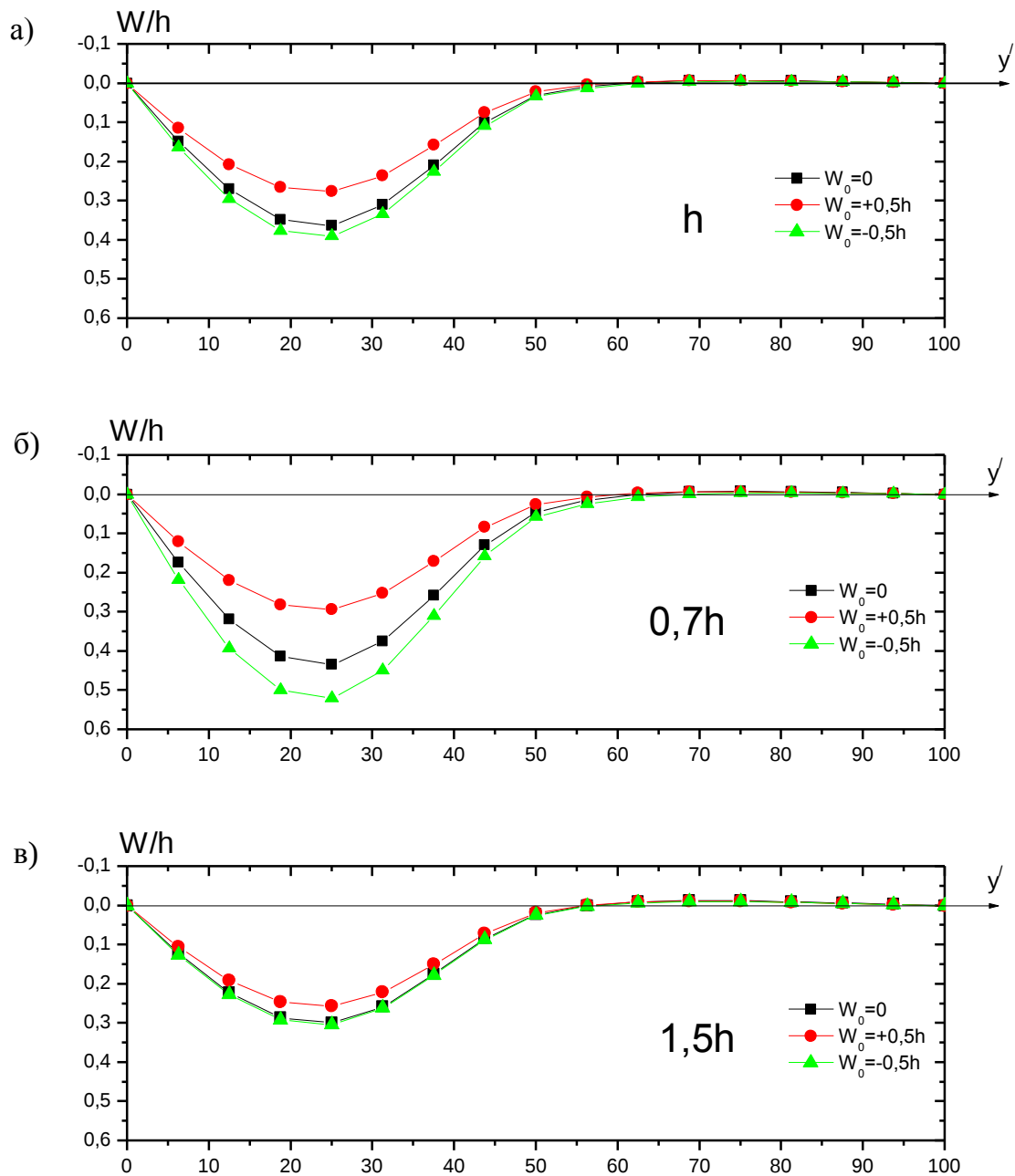


Рис. 4.24. Эпюры приведённых дополнительных прогибов $\bar{W}$ пластины с разным начальным прогибом W_0 , нагруженной несимметричной нагрузкой $q = q_s$

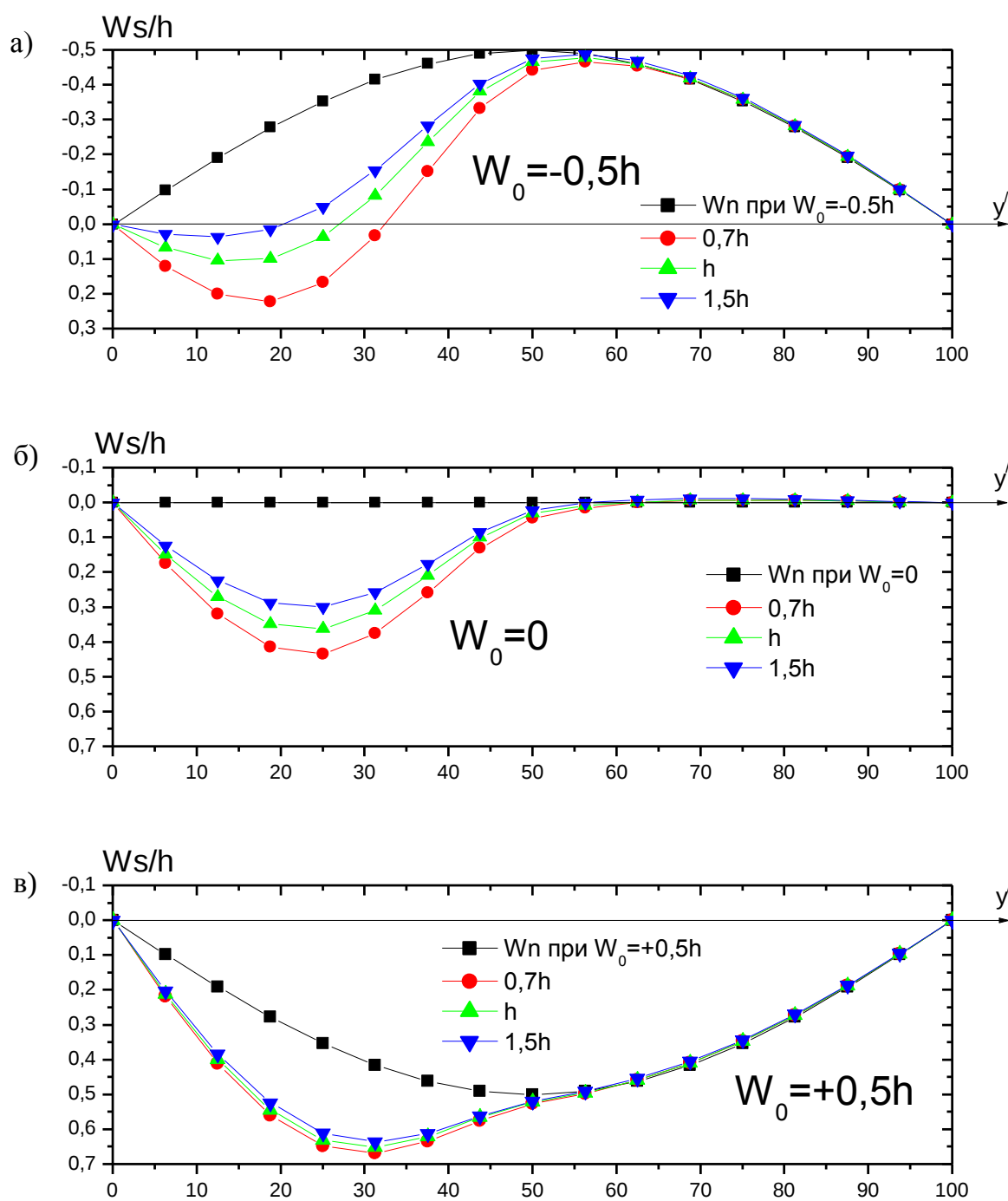


Рис. 4.25. Эпюры приведённых суммарных прогибов $\bar{W}_s$ пластины с разным начальным прогибом W_0 , нагруженной несимметричной нагрузкой $q = q_s$

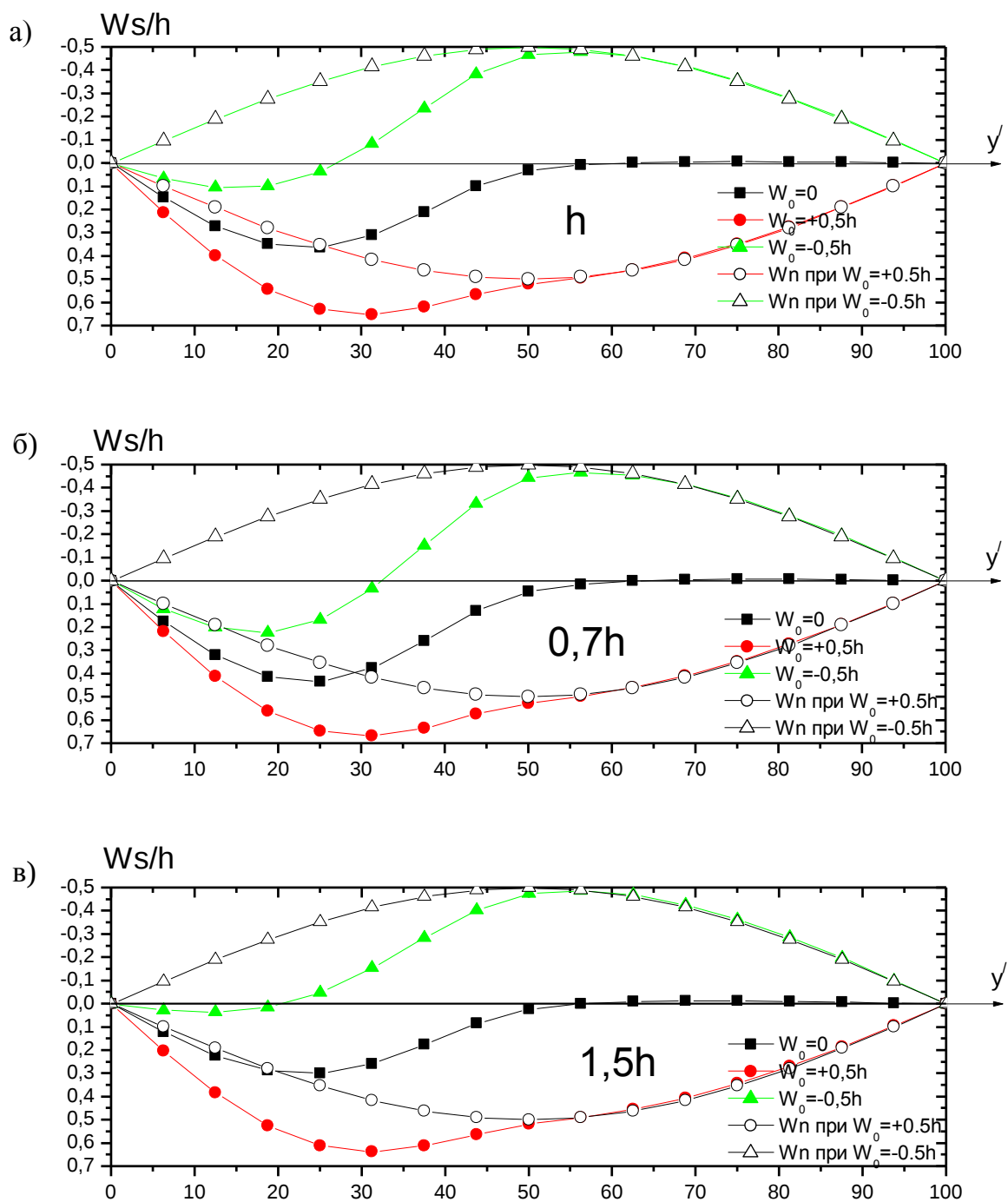


Рис. 4.26. Эпюры приведённых суммарных прогибов $\bar{W}_s$ пластины с разным начальным прогибом W_0 , нагруженной несимметричной нагрузкой $q = q_s$

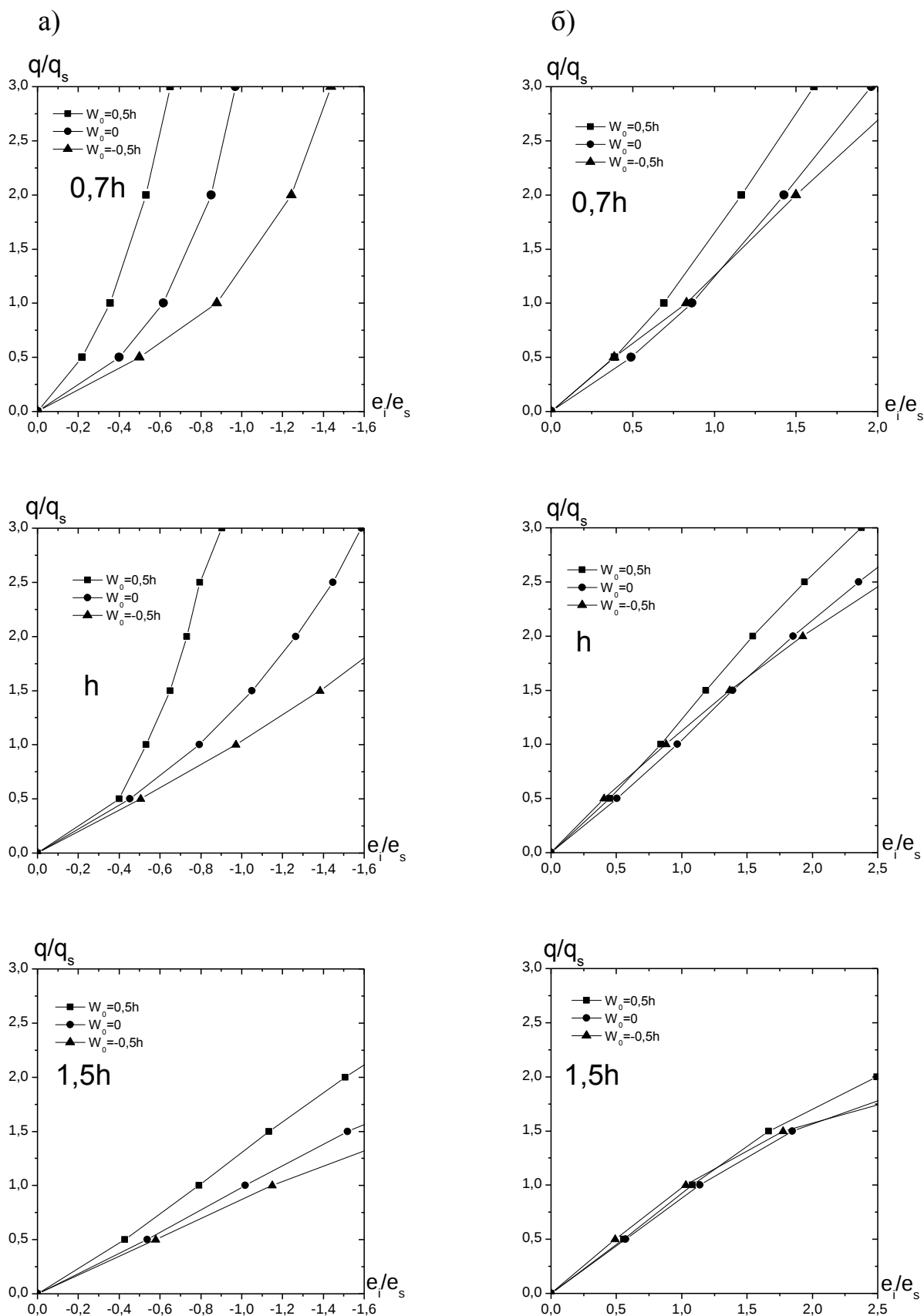


Рис. 4.27. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины, полученные при учёте физической и геометрической нелинейностей:
а) в верхних волокнах центра панели; б) в нижних волокнах центра панели

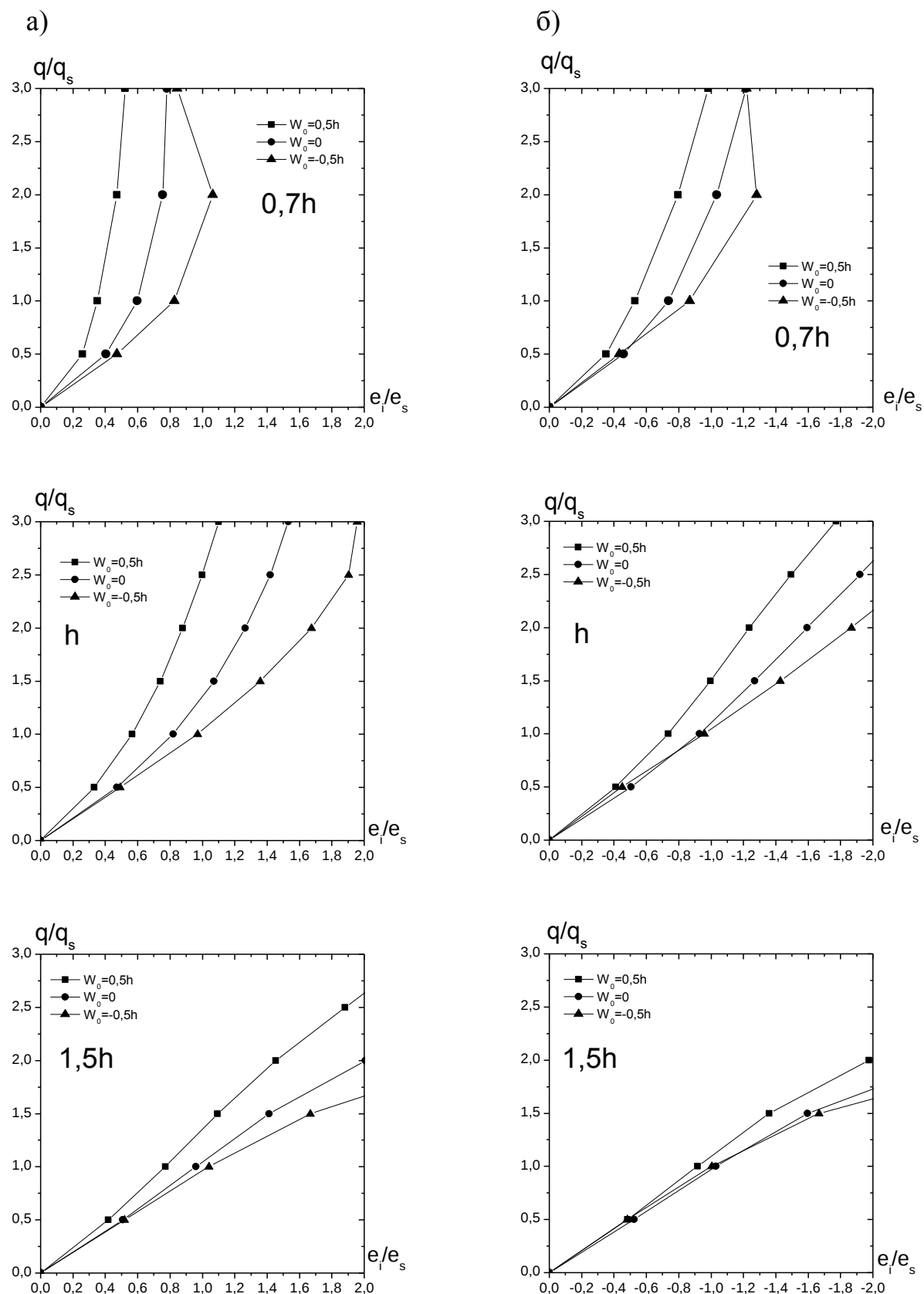


Рис. 4.28. Графики зависимости « $\bar{e}_l - \bar{q}$ » пластины, полученные при учёте физической и геометрической нелинейности:
 а) в верхних волокнах центра пластины; б) в нижних волокнах центра пластины

Во всех рассматриваемых случаях, как и следовало ожидать, наиболее деформируемыми являются более тонкие пластины.

В пластинах с положительным начальным прогибом при нагрузке $q = q_s$ разница между прогибами пластин толщиной $0,7h$ и $1,5h$ составила $0,04h$. При отрицательном прогибе разница между прогибами увеличилась и составила $0,22h$ (рис. 4.23).

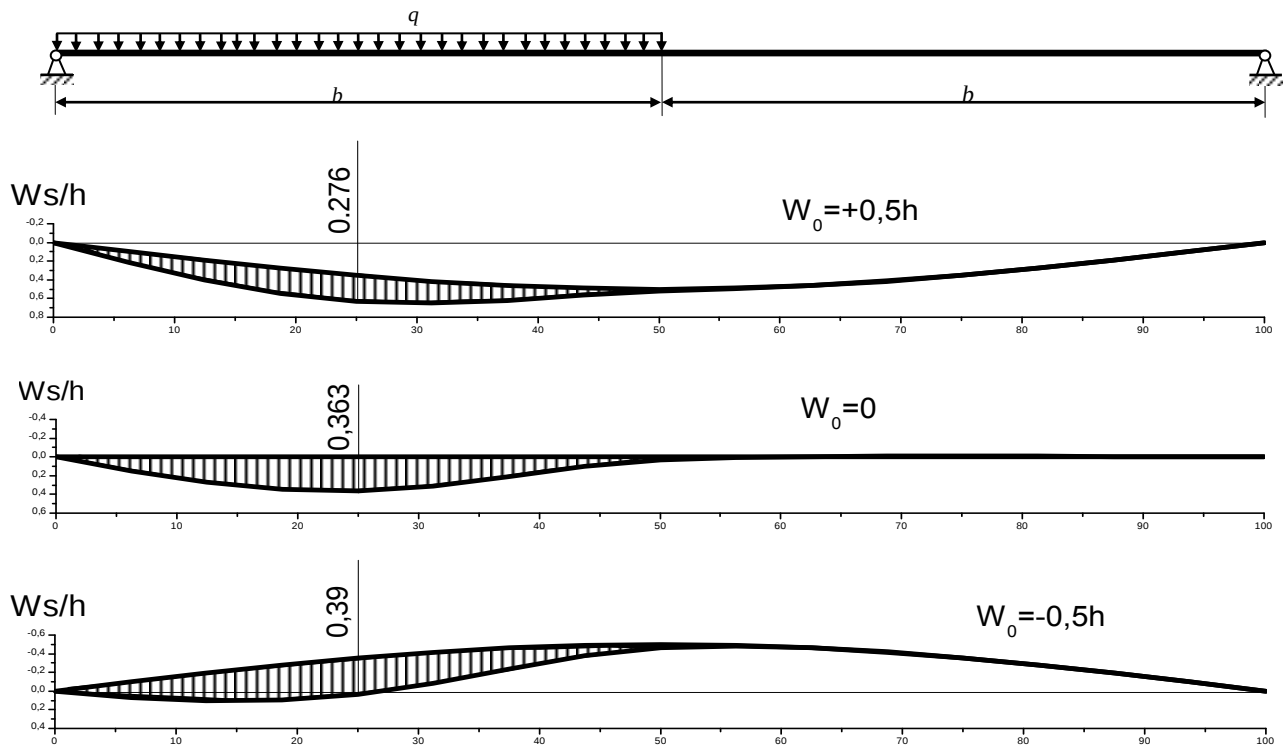


Рис. 4.29. Эпюры суммарных прогибов W_s / h
центра левой панели пластины толщиной $h=1$ см ($q = q_s$)

Отрицательный начальный прогиб приводит к увеличению дополнительных прогибов пластин (рис. 4.24).

Так при нагрузке $q = q_s$ для всех рассматриваемых толщин наименьшие прогибы центра нагруженной панели наблюдаются при положительном начальном прогибе и наибольшие прогибы – при отрицательном начальном прогибе. В пластине толщиной $h=1$ см при нагрузке $q = q_s$ величина дополнительных прогибов пластины в центре левой панели при $W_0 = +0.5h$ равна $0,276h$, а при $W_0 = -0.5h$ величина дополнительных прогибов в той же точке равна $0,39h$ (рис. 4.29). С увеличением нагрузки разница между прогибами при

положительном и отрицательном начальном прогибе увеличивается. При нагрузке $q = 2q_s$ дополнительные прогибы центра левой панели пластины толщиной h при положительном начальном прогибе $\bar{W} = 0.47h$, а при отрицательном начальном прогибе дополнительные прогибы $\bar{W} = 0.75h$.

Это объясняется возникающей пологостью пластины с начальным прогибом. В.З. Власов в своей работе [37] отмечал, что в подобных случаях можно рассматривать пластины на некотором фиктивном упругом основании с коэффициентом упругости, зависящим от кривизны, величина которой при отрицательном начальном прогибе увеличивается с ростом нагрузки, а при положительном начальном прогибе она уменьшается. По мере нагружения пластины с отрицательным начальным прогибом радиус кривизны увеличивается, что приводит к уменьшению коэффициента упругости фиктивного основания, т.е. к уменьшению жёсткости пластины. При положительном начальном прогибе радиус кривизны уменьшается, это приводит к увеличению жёсткости пластины.

Максимальные суммарные прогибы независимо от толщины пластины возникают при положительном начальном прогибе (рис. 4.25, в). Суммарные прогибы в центре левой панели в пластине толщиной $h = 1\text{см}$ с положительным начальным прогибом равны $0,6298h$, в пластине с отрицательным начальным прогибом суммарные прогибы равны $0,0361h$. В пластине без прогиба ($W_0 = 0$) прогибы в центре левой панели равны $0,363h$.

В пластинах с отрицательным начальным прогибом возникают суммарные прогибы разного знака (рис. 4.28, а). Наибольшая разница наблюдается у пластин толщиной $0,7h$. Это связано с большим влиянием продольных усилий у пластин толщиной $0,7h$.

В пластинах толщиной $0,7h$ наблюдается увеличение суммарных прогибов (рис. 4.26, б). В пластинах толщиной $1,5h$ для нагрузки $q = q_s$ суммарные прогибы минимальные.

В таблице 4.5 приведены вертикальные перемещения центра левой панели пластины без начального прогиба ($W_0 = 0$) при нагрузке начала текучести ($q = q_s$).

Таблица 4.5

Вертикальные перемещения центра левой панели

Прогибы пластины	0,7h	h	1,5h
	$q = q_s, W_0 = 0$		
W	0,43h	0,36h	0,29h

При нагрузке начала текучести ($q = q_s$) в пластине без начального прогиба максимальные вертикальные перемещения (0,43h) возникают в центре левой панели пластины толщиной 0,7h, а минимальные – в пластине толщиной 1,5h – (0,29h) (табл. 4.5).

В табл. 4.6 представлено сравнение прогибов $\bar{W}$ центра левой панели ребристой пластины при положительном $W_0 = +0,5h$ и отрицательном $W_0 = -0,5h$ начальных прогибах в процентном соотношении к прогибам, полученным без учёта начального прогиба ($W_0 = 0$). Знаки «-», «+» показывают соответственно уменьшение и увеличение вертикальных перемещений пластины, имеющей начальный прогиб, по сравнению с вертикальными перемещениями пластины $\bar{W}$ без начального прогиба.

Таблица 4.6

Толщина пластины	$q = q_s$	$q = 2q_s$
	Отличие дополнительных прогибов центра левой панели при $W_0 = +0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
0,7h	- 32,3	- 27,1
h	- 23,8	- 24,4
1,5h	- 14,1	- 21,8
	Отличие дополнительных прогибов центра левой панели при $W_0 = -0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
0,7h	+ 19,6	+ 26,0
h	+ 7,5	+ 19,6
1,5h	+ 1,6	+ 19,3
	Отличие суммарных прогибов центра левой панели при $W_0 = +0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
0,7h	+ 49	+ 25
h	+ 74	+ 32
1,5h	+ 104	+ 31

Толщина пластины	$q = q_s$	$q = 2q_s$
	Отличие суммарных прогибов центра левой панели при $W_0 = -0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
$0,7h$	- 62	- 28
h	- 90	- 37
$1,5h$	- 116	- 33

Согласно анализу графиков зависимостей приведённых дополнительных прогибов от нагрузки – « $\bar{W}-q$ » (рис. 4.23), эпюр приведённых дополнительных прогибов (рис. 4.24) отмечается определённая закономерность. В пластинах с положительным начальным прогибом, нагруженных несимметричной нагрузкой $q = q_s$, дополнительные прогибы становятся меньше, по сравнению с прогибами пластин без начального прогиба. При отрицательном начальном прогибе отмечается увеличение дополнительных прогибов, особенно с ростом нагрузки (рис. 4.23). Что указывает на большее развитие мембранных составляющих деформаций. Минимальное увеличение дополнительного прогиба в пластине толщиной $1,5h$ при нагрузке $q = q_s$ составило 1,6 % (табл. 4.6, рис. 4.25).

Уменьшение суммарных прогибов происходит в пластинах с отрицательным начальным прогибом. В пластинах с положительным начальным прогибом суммарные прогибы увеличиваются по сравнению с прогибами пластины без начального прогиба. В пластине толщиной $1,5h$ максимальное имеет место увеличение суммарных прогибов (104 %) (рис. 4.26, в).

С увеличением нагрузки разница между дополнительными прогибами пластин с начальным прогибом становится больше, по сравнению с дополнительными прогибами пластин без начального прогиба. И обратный результат наблюдается при анализе суммарных прогибов (табл. 4.6).

В таблицах 4.7, 4.8 представлено сравнение приведённой интенсивности деформаций нижних (табл. 4.7) и верхних (табл. 4.8) волокон центра панели при положительном $W_0 = +0,5h$ и отрицательном $W_0 = -0,5h$ начальных

прогибах в процентах к приведённой интенсивности деформаций, полученной при расчёте пластины без начального прогиба ($W_0 = 0$).

Таблица 4.7

Толщина пластины	$q = q_s$	$q = 2q_s$
	Отличие интенсивности деформаций нижних волокон центра левой панели при $W_0 = +0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
$0,7h$	19,92	18,28
h	13,03	16,59
$1,5h$	5,09	17,31
	Отличие интенсивности деформаций нижних волокон центра левой панели при $W_0 = -0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
$0,7h$	4,02	5,15
h	8,97	4,02
$1,5h$	9,59	8,55

При нагрузке $q = q_s$ наибольшие напряжения имеют место в нижних волокнах центра панели. Менее всего сказывается влияние положительного начального прогиба на напряжённое состояние нижних волокон центра панели пластины толщиной $1,5h$ (5,09 %). Наличие отрицательного начального прогиба меньше всего сказывается на интенсивности деформаций нижних волокон пластин толщиной $0,7h$ (4, 02 %) (табл. 4.7, рис. 4.27). Это связано с большим влиянием на тонкие пластины продольных усилий по сравнению с влиянием изгибающих моментов.

Таблица 4.8

Толщина пластины	$q = q_s$	$q = 2q_s$
	Отличие интенсивности деформаций верхних волокон центра панели при $W_0 = +0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
$0,7h$	42,3	37,46
h	32,98	42,3
$1,5h$	22,21	30,44

Толщина пластины	Отличие интенсивности деформаций верхних волокон центра панели при $W_0 = -0,5h$ и при $W_0 = 0$, %	
$0,7h$	42,23	46,29
h	22,28	37,56
$1,5h$	12,78	35,53

При отрицательном начальном прогибе с увеличением нагрузки за пределом упругости материала для верхних волокон процент погрешности увеличивается у пластин толщиной h и $1,5h$.

Для верхних волокон пластин меньшей толщины более выражено влияние продольных усилий уже для значения $q = q_s$ (табл. 4.8).

Анализ результатов расчётов показал значительное влияние начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние пластины.

4.2. Анализ влияния начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние подкреплённой цилиндрической оболочки с учётом физической и геометрической нелинейностей

В данном параграфе приведён анализ влияния начального симметричного прогиба и рёбер разной жёсткости на НДС шарнирно закреплённой цилиндрической пологой оболочки ($\bar{k}_y = k_y a^2/h = 30$ – безразмерная главная кривизна; $f = 3,84$ см – стрела подъёма оболочки) при возрастающей нагрузке ($\bar{q} = qb^4/Eh^4$) [164]. Оболочка ($a/h \times b/h = 50 \times 50$) постоянной толщины h выполнена из материала Д16Т (рис. 4.30). Диаграмма деформирования материала приведена на рис. 4.31.

Оболочка подкреплена продольными рёбрами жёсткости: $(b_p/h) \times (h_p/h) = 2 \times 5$ (слабое ребро [100]) или $(b_p/h) \times (h_p/h) = 4 \times 11$ (сильное ребро), где b_p , h_p – ширина и высота ребра жёсткости. Поперечные кромки шарнирно закреплены. Ребро установлено с эксцентриситетом e .

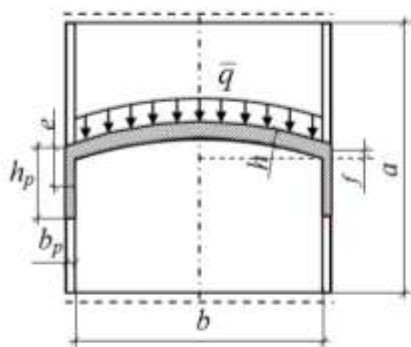


Рис. 4.30 Схема оболочки

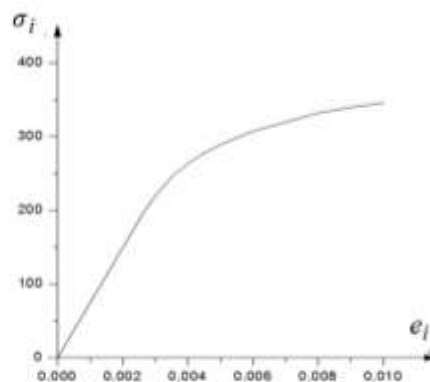


Рис. 4.31 Диаграмма деформирования материала Д16Т

Начальный прогиб представлен в аналитическом виде:

$$W_n(x, y) = W_0 F_1(x) F_2(y).$$

Здесь W_0 – максимальное значение начального прогиба в центре оболочки ($W_0 = +0,5h$; 0 ; $-0,5h$). Функции $F_1(x) = \sin(\pi x/a)$ при $(0 \leq x \leq a)$; $F_2(y) = \sin(0,5\pi(1 + y/(b/2)))$ при $(-b/2 \leq y \leq +b/2)$.

При расчёте учитывались геометрическая и физическая нелинейности.

Целью исследования являлся анализ результатов расчёта гибких подкреплённых пологих цилиндрических оболочек с начальным прогибом за пределом упругости материала. Анализировалось влияние положительного и отрицательного начального прогиба и разной жёсткости рёбер на НДС оболочки.

Подкрепление рёбрами жёсткости $(b_p/h) \times (h_p/h) = 2 \times 5$.

Для центральной части оболочки, подкреплённой рёбрами 2×5 , при положительном и отрицательном начальном прогибе рассматривались полученные в результате расчёта характерные графики: « $\bar{q} - \bar{W}$ » (рис. 4.32) и « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » (рис. 4.33). Здесь: приведённая нагрузка $\bar{q} = qb^4/Eh^4$, приведённый прогиб $\bar{W} = W/h$, приведённая интенсивность деформаций $\bar{e}_i = e_i/e_s$, W – дополнительный прогиб пластины от нагрузки, q – величина нагрузки, e_s – предел текучести материала.

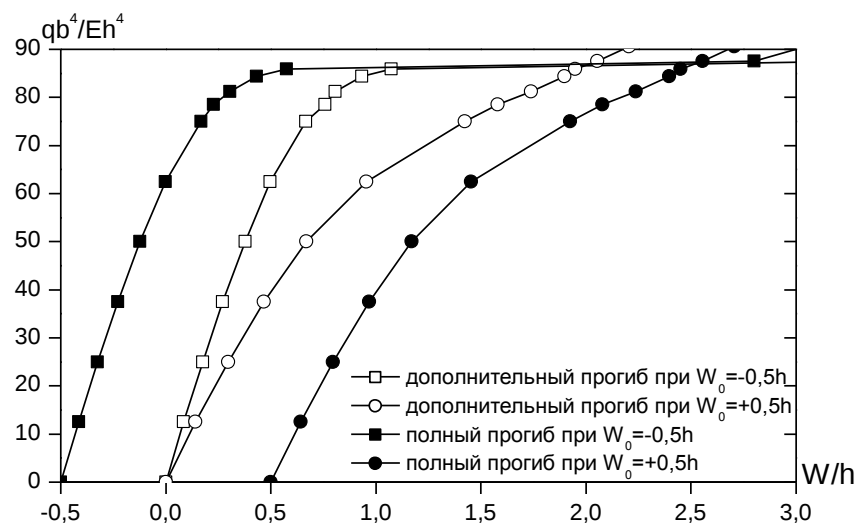


Рис. 4.32. График зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » для центральной части оболочки с рёбрами 2х5

Согласно результатам, представленным на рис. 4.32 « $\bar{q} - \bar{W}$ », следует отметить существенное влияние знака начального прогиба. Установлено, что более деформируемой является оболочка с положительным начальным прогибом. Однако для оболочки с отрицательным начальным прогибом отмечается наличие критической нагрузки $\bar{q} = 86$, после которой рассматриваемая конструкция теряет устойчивость. Она деформируется активно под действием нагрузки.

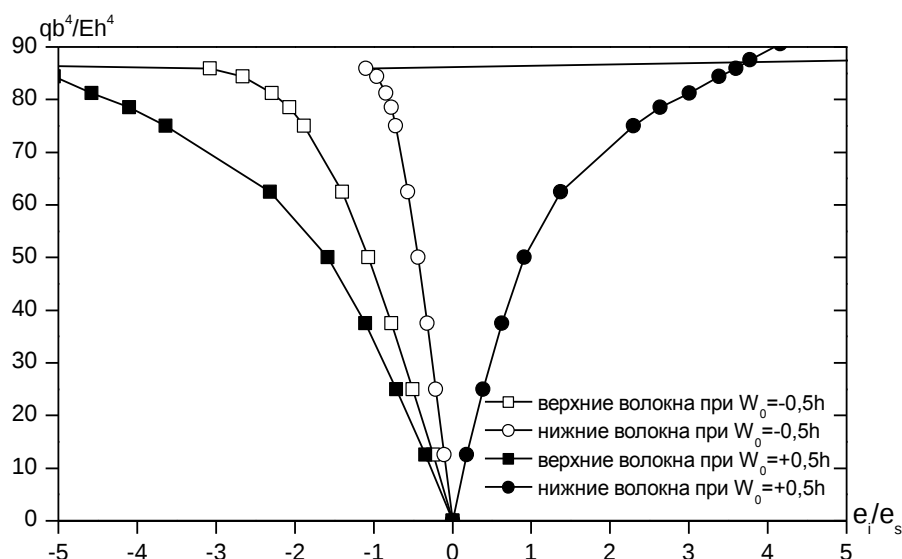


Рис. 4.33. График зависимости « $\bar{q} - \bar{e}_i$ » для центральной части оболочки с рёбрами 2х5

Результаты расчёта, приведённые на рис. 4.33 « $\bar{e}_i - \bar{q}$ », показывают существенное влияние знака начального прогиба. Установлено, что интен-

сивность деформаций больше при положительном начальном прогибе. Так как напряжение зависит от деформации, то более напряжёнными являются верхние волокна при положительном начальном прогибе.

Для нижней части оболочки следует отметить разные знаки интенсивности деформаций. Это происходит потому, что при положительном начальном прогибе нижние волокна рассматриваемой оболочки растягиваются, а при отрицательном – сжимаются. Более напряжённой в центральной точке является оболочка с положительным начальным прогибом. Однако для оболочки с отрицательным начальным прогибом, как уже отмечалось выше, имеется критическая нагрузка $\bar{q} = qb^4 / Eh^4 = 86$, при достижении которой она теряет устойчивость и активно деформируется.

На рис. 4.34 показано развитие зон упругопластических деформаций оболочки по её толщине при положительном и отрицательном начальных прогибах. На верхней части рис. 4.34 представлена верхняя поверхность оболочки, а на нижней – нижняя поверхность. Слева изображены результаты расчёта оболочки с положительным начальным прогибом, а справа с отрицательным.

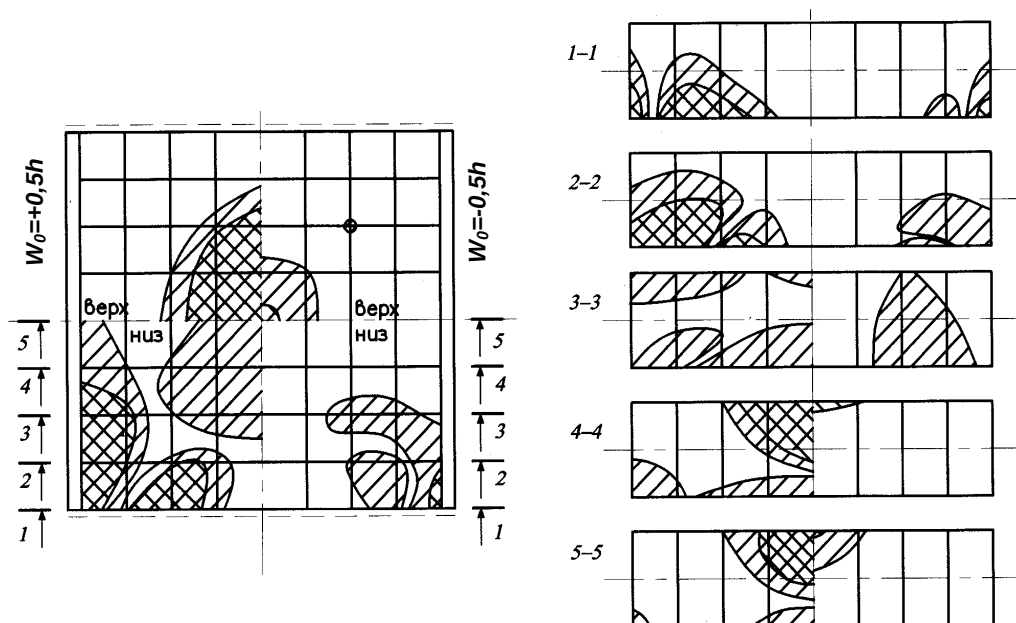


Рис. 4.34. Зоны пластичности по нижней и верхней поверхностям оболочки подкреплённой рёбрами 2×5 при нагрузках $\bar{q} = 50$ (▨); $\bar{q} = 64,5$ (▩)

Из рассмотрения зон пластичности следует, что пластические деформации больше развиваются в оболочке с положительным начальным прогибом, особенно в нижних волокнах. В четвертях оболочки по диагонали с отрицательным начальным прогибом зона пластичности распространяется на всю толщину оболочки. Это указывает на значительное влияние мембранных усилий.

Подкрепление рёбрами жёсткости $(b_p/h) \times (h_p/h) = 4 \times 11$.

Ниже приведены графики зависимостей « $\bar{q} - \bar{W}$ », (рис. 4.35) и « $\bar{q} - \bar{e}_i$ » (рис. 4.36) для центральной части оболочки, подкреплённой рёбрами с поперечным сечением 4×11 , при положительном и отрицательном начальном прогибе. Максимальная величина W_0 равна половине толщины оболочки.

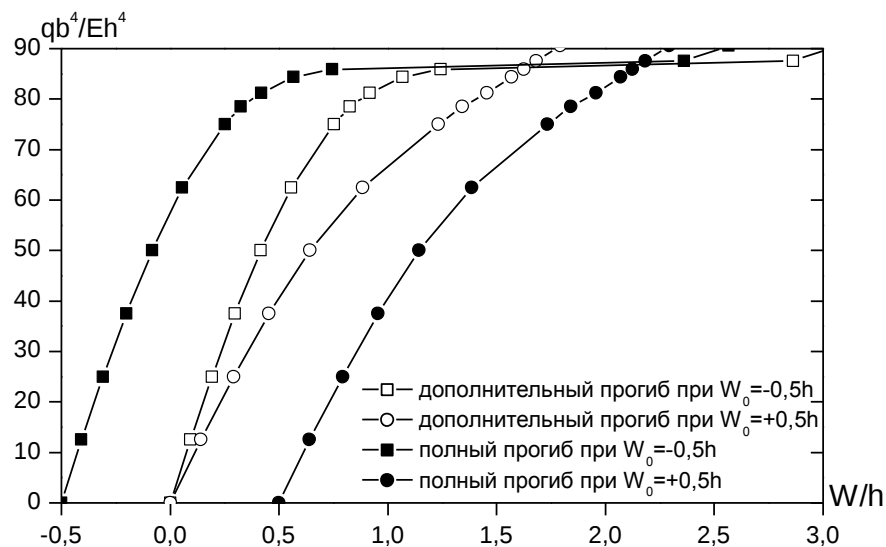


Рис. 4.35. График зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » для центральной части оболочки с рёбрами 4×11

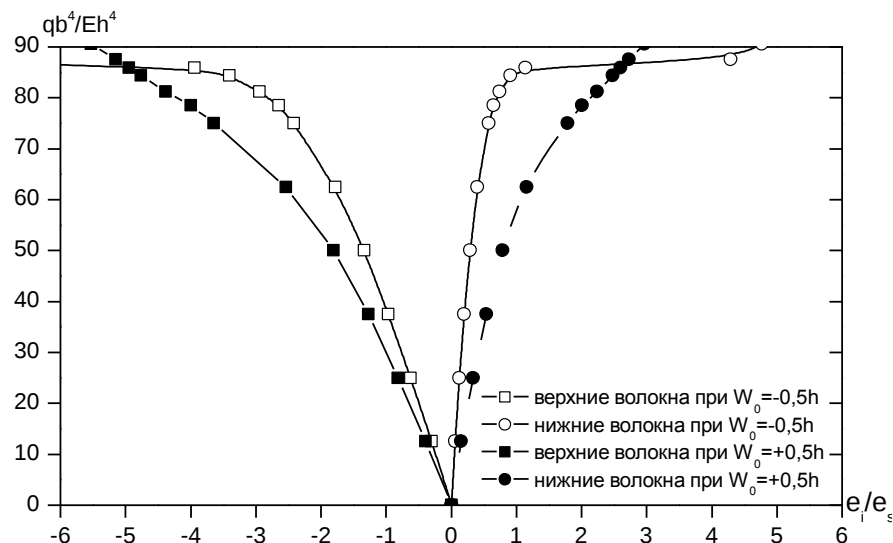


Рис. 4.36. График зависимости « $\bar{q} - \bar{e}_i$ » для центральной части оболочки с рёбрами 4×11

Из рассмотрения графиков « $\bar{q} - \bar{W}$ » и « $q - \bar{e}_i$ » для оболочки, подкреплённой сильными рёбрами жёсткости, отмечаются те же особенности НДС, что и при слабом ребре жёсткости. Это связано с тем, что слабое ребро поставлено с эксцентриситетом, что увеличивает жёсткость ребра.

Рассмотрены зоны пластичности по толщине оболочки (рис. 4.37). Из рассмотрения зон пластичности следует, что пластические деформации больше развиваются в оболочке с положительным начальным прогибом, особенно в нижних волокнах. Но наиболее развиты пластические деформации в центральной части оболочки для верхних волокон. В нижней части оболочки зоны пластичности развиваются по диагонали при положительном начальном прогибе, а при отрицательном – на нижней поверхности зоны пластичности развиваются в угловых зонах.

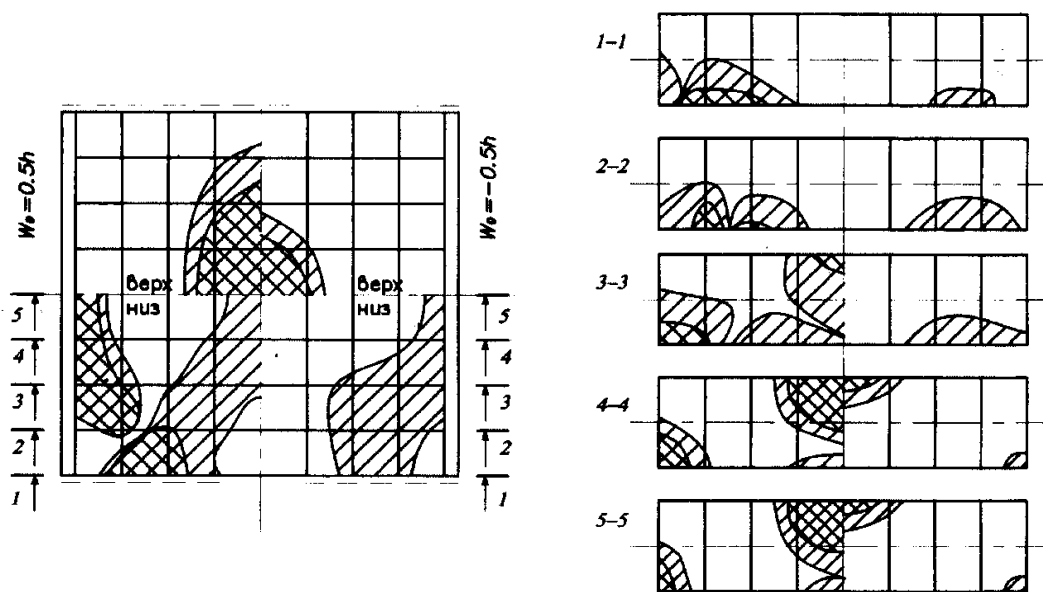


Рис. 4.37. Зоны пластичности по нижней и верхней поверхностям оболочки, подкреплённой рёбрами 4×11 при нагрузках $\bar{q} = 50$ (▨); $\bar{q} = 64,5$ (▤)

Анализ результатов расчётов показал, что при положительном начальном прогибе пластические деформации больше развиваются по поверхностям, особенно в нижних волокнах оболочки, как при слабых рёбрах, поставленных с эксцентриситетом, так и при сильных рёбрах.

При слабых рёбрах жёсткости с отрицательным начальным прогибом оболочки зоны пластичности более развиты по толщине оболочки в четвер-

тях по диагонали (рис. 4.34). Это указывает на влияние мембранных усилий.

При сильных рёбрах жёсткости с отрицательным начальным прогибом, зоны пластичности развиваются на нижней поверхности в угловых частях оболочки, а при положительном начальном прогибе по диагонали (рис. 4.37).

Независимо от жёсткости подкрепляющих рёбер, более деформируемой является оболочка с положительным начальным прогибом. Однако оболочка с отрицательным начальным прогибом теряет устойчивость «в большом» и начинает деформироваться после потери устойчивости более активно.

Для нижней части сечения оболочки, подкреплённой слабыми рёбрами жёсткости, отметим разные знаки интенсивности деформаций. Это происходит оттого, что при положительном начальном прогибе нижние волокна рассматриваемой оболочки растягиваются, а при отрицательном – нижние волокна сжимаются. Более напряжённой в рассматриваемом центральном сечении является оболочка с положительным начальным прогибом.

4.3. Определение напряжённо-деформированного состояния пластины с разным уровнем смещения центральной опоры при действии поперечной нагрузки

Смещение уровня промежуточной жёсткой опоры пластины даёт возможность снизить значение расчётного изгибающего момента более чем на 40 %, что ведёт к уменьшению расхода материала элементов конструкций и стоимости монтажа [83].

В данном параграфе рассматривается изотропная, неразрезная, гибкая пластина постоянной толщиной $h=1\text{ см}$ с двумя равными панелями $a \times b = 50 \times 50$ (см) и шарнирным опиранием всех сторон её контура. Действующая нагрузка q – равномерно распределённая (рис. 4.38). Материал пластины Ст3. Диаграмма деформирования материала представлена на рис. 4.1, б. Срединная поверхность пластины имеет начальный синусоидаль-

ный прогиб (4.1) с максимальным положительным значением W_0 в центре пластины (рис. 4.38). Ось y' – ось симметрии пластины.

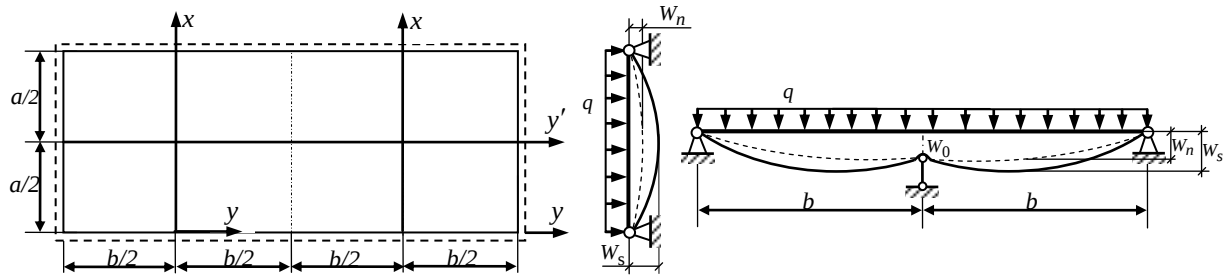


Рис. 4.38. Расчётная схема пластины

Определяется напряжённно-деформированное состояние пластины при раз-
ной величине начального прогиба W_0 . Рассматривается нелинейная постановка
задачи, одновременно учитывающая физическую и геометрическую нелинейно-
сти. Ниже приведены результаты, полученных параметров напряжённно-
деформированного состояния пластины при разной величине смещения цен-
тральной опоры и возрастании приведённой поперечной нагрузки $\bar{q} = qb^4 / Eh^4$
от 0 до 29,76 в пределах и за пределом упругости (максимальная приведённая
нагрузка $\bar{q} = 29,76$ соответствует нагрузке $q = 1 \text{ МПа}$). Максимальная величина
смещения $W_0 = 0; 0,5h; h; 1,5h$ – в центре пластины.

Одной из характеристик напряжённно-деформированного состояния при
расчёте пластины являлся изгибающий момент M_x . Изменение приведённо-
го изгибающего момента $\bar{M}_x = M_x / M_s$ ($M_s = \sigma_s h^2 / 6$) центра пластины по-
казано на рис. 4.39 при разных значениях начального прогиба. На рис. 4.41
приведены эпюры приведённого изгибающего момента M_x / M_s панели по
оси симметрии пластины при $\bar{q} = 29,76$. Приведены результаты исследования
НДС только для первой панели, так как задача симметричная.

Приведённый прогиб $\bar{W} = W/h$ в центре панели характеризует жёсткость
пластины в зависимости от приведённой нагрузки $\bar{q} = qb^4 / Eh^4$ (рис. 4.40).
Эпюры приведённых прогибов по оси симметрии пластины y' в зависимости
от начального прогиба при $\bar{q} = 29,76$ приведены на рис. 4.42.

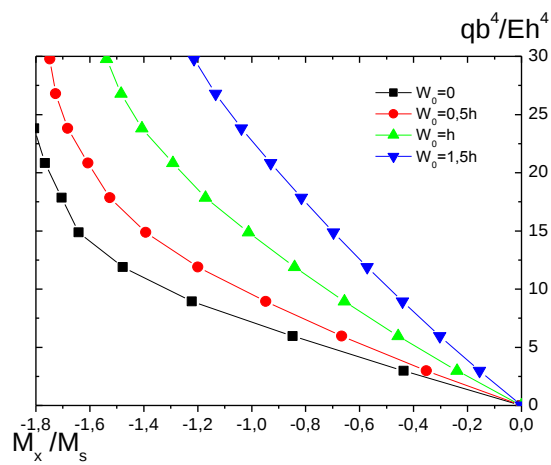


Рис. 4.39. График зависимости « $\bar{q} - \bar{M}_x$ » центра пластины

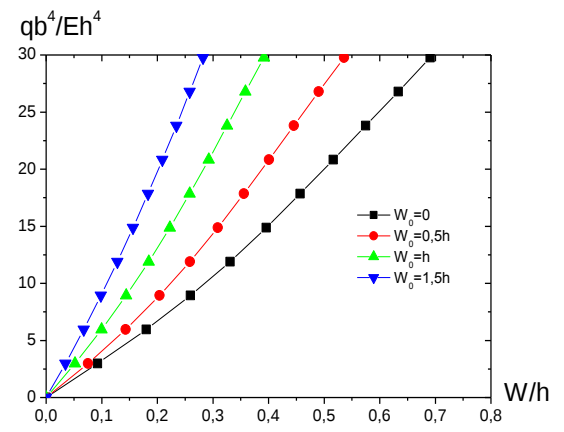


Рис. 4.40. График зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » центра левой панели

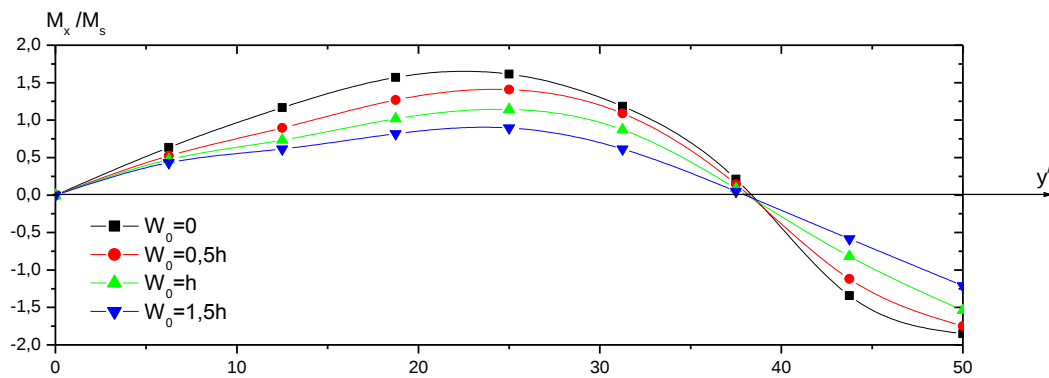


Рис. 4.41. Эпюра приведённого продольного изгибающего момента M_x / M_s левой панели по оси симметрии пластины при $\bar{q} = 29,76$

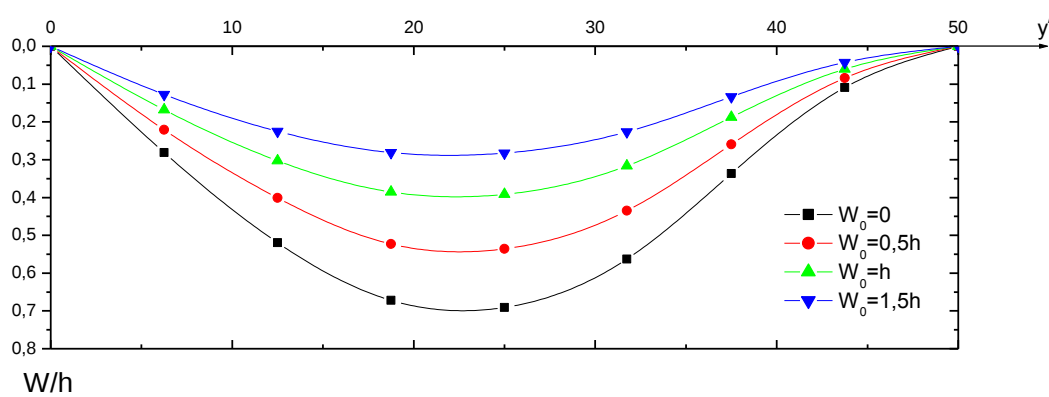


Рис. 4.42. Эпюра приведённых прогибов левой панели по оси симметрии пластины при $\bar{q} = 29,76$

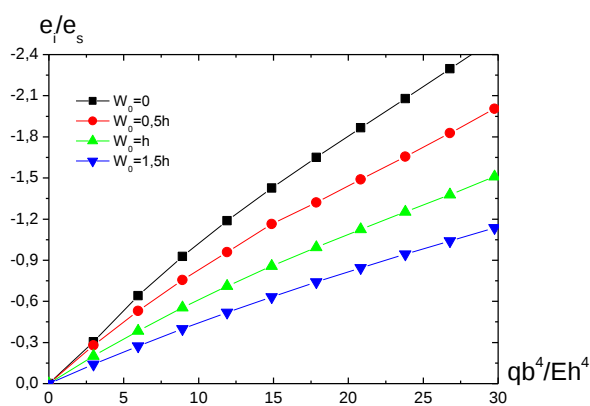


Рис. 4.43. График зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ »
нижних волокон центра пластины

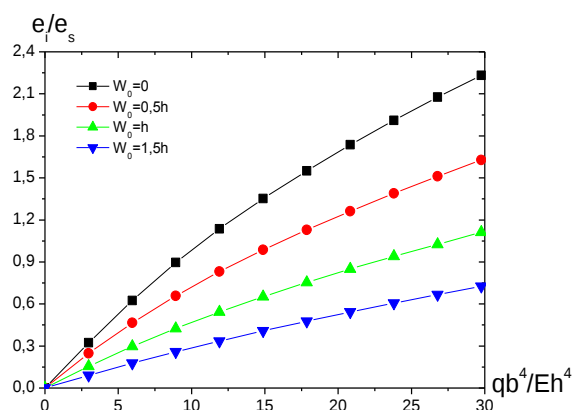


Рис. 4.44. График зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ »
верхних волокон центра пластины

Деформированное состояние верхних и нижних волокон пластины характеризуется приведённой интенсивностью деформаций — $\bar{e}_i = e_i / e_s$ ($e_s = \sigma_s / E$ — деформация предела текучести материала) в центре пластины в зависимости от приведённой поперечной нагрузки $\bar{q}$ (рис. 4.43, 4.44) и эпюрами приведённой интенсивности деформаций $\bar{e}_i$ по оси симметрии пластины y' в зависимости от начального прогиба при $\bar{q} = 29,76$ (рис. 4.45, 4.46).

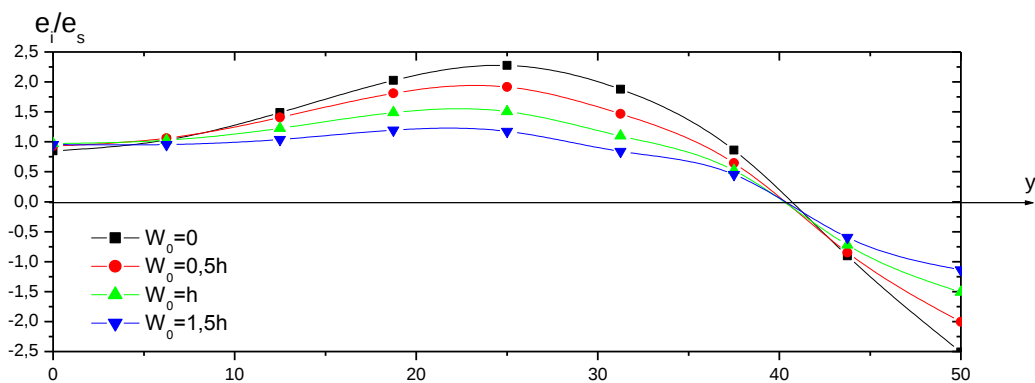


Рис. 4.45. Эпюра приведённой интенсивности деформаций
нижних волокон панели при $\bar{q} = 29,76$

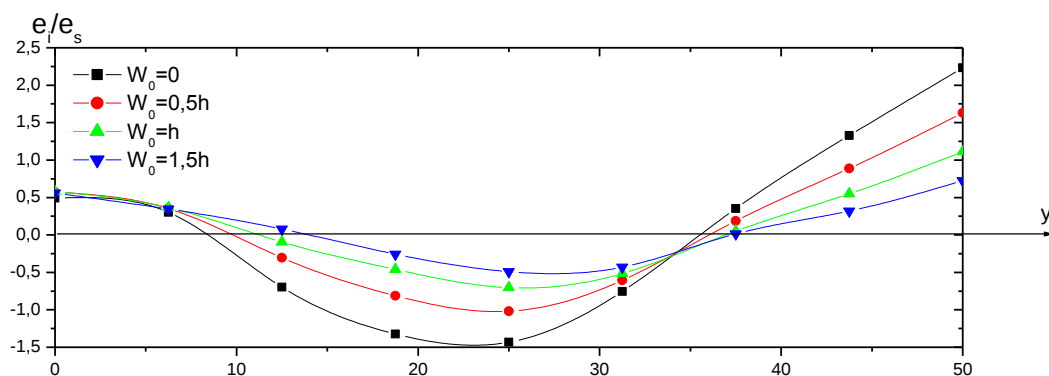


Рис. 4.46. Эпюра приведённой интенсивности деформаций верхних волокон панели при $\bar{q} = 29,76$

Для качественного представления влияния начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние на рис. 4.47 показано развитие зон пластичности верхней и нижней поверхностям и по толщине двухпролётной пластины при действии поперечных распределённых нагрузок ($\bar{q} = 23,808$ и $\bar{q} = 29,76$) со смещением центральной опоры, равным толщине пластины ($W_0 = h$) и без смещения опоры ($W_0 = 0$).

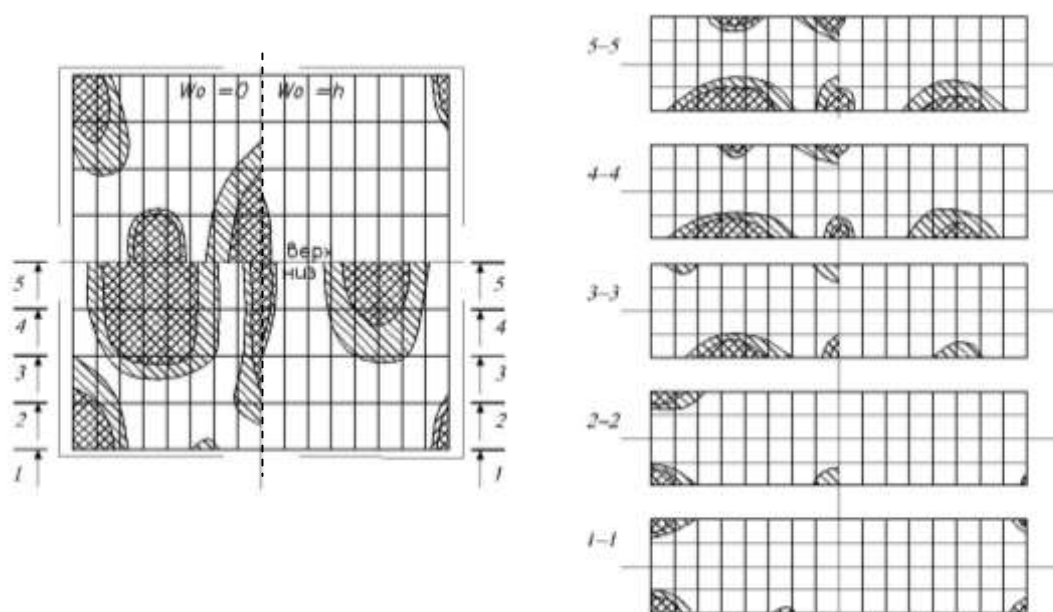


Рис. 4.47. Развитие зон пластичности по полю и толщине пластины при действии поперечной нагрузки $\bar{q} = 23,808$ (▨) и $\bar{q} = 29,76$ (▧)

Анализ представленных эпюр, графиков и зон пластичности показал, что соответствующее смещение промежуточной жёсткой опоры позволяет изменить напряжённо-деформированное состояние пластины. Увеличение сме-

щения приводит к уменьшению прогибов, деформаций, а соответственно и напряжений пластины, а также уменьшению изгибающих моментов (рис. 4.39 – 4.46).

При действии рассматриваемой распределённой на пластину нагрузки можно исключить появление зон пластичности за счёт смещения уровня осадки промежуточной жёсткой опоры (рис. 4.47). При увеличении начального прогиба уменьшаются напряжения и деформации.

Так как рассматриваемое смещение уровня опор сравнимо с толщиной пластины, то необходим учёт нелинейностей. Прогибы и интенсивность деформаций, полученные при учёте физической и геометрической нелинейностей существенно отличаются от полученных при линейном решении.

4.4. Изгиб за пределом упругости гибкой

подкреплённой ребром пластины с начальным прогибом

В данном параграфе приведены результаты исследования напряжённо-деформированного состояния гибкой пластины, материал которой Ст3 работает за пределом упругости [140]. Пластина постоянной толщины $h = 1$ см с двумя равными панелями $a \times b = 50 \times 50$ (см), подкреплена центральным ребром ($h_p \times b_p = 4 \times 4$ (см)), шарнирно опёрта со всех сторон на жёсткие опоры (рис. 4.48). Начальный прогиб центра пластины задаётся выражением (4.1).

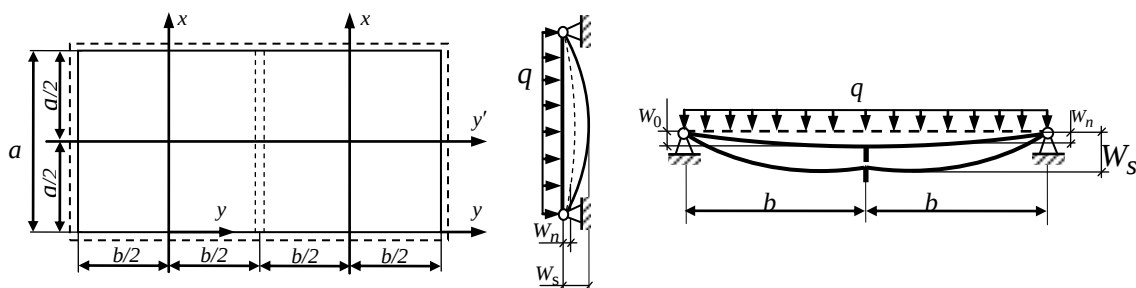


Рис.4.48. Расчетная схема пластины

При расчёте учитывалась физическая и геометрическая нелинейности. Для анализа напряжённо-деформированного состояния определялись вертикальные перемещения W и интенсивности деформаций e_i при возрастающей

величине поперечной равномерно распределённой нагрузки с положительным начальным прогибом центра пластины. Величина начального прогиба $W_0 = 0; 0.5h; h; 1.5h; 2h$.

Ниже приведён анализ результатов расчёта. Так как пластина нагружена симметрично, то результаты приведены только для левой панели.

На рис. 4.49 приведены графики, характеризующие изменение приведённого изгибающего момента M_x / M_s в продольном (вдоль оси y) направлении пластины с начальным прогибом центра пластины при приведённой нагрузке $\bar{q} = qb^4/Eh^4 = 29,76$ ($q = 1 \text{ МПа}$).

Эпюры прогибов W/h по оси симметрии пластины y' при приведённой нагрузке $\bar{q} = 29,76$ в зависимости от величины начального прогиба представлены на рис. 4.50.

Деформированное состояние нижних волокон пластин при разном начальном прогибе центра пластины характеризуется эпюрами приведённой интенсивности деформаций $\bar{e}_i = e_i/e_s$ от приведённой нагрузки $\bar{q} = 29,76$ по оси симметрии пластины (рис. 4.51) и диаграммой деформирования материала (рис. 4.1, б).

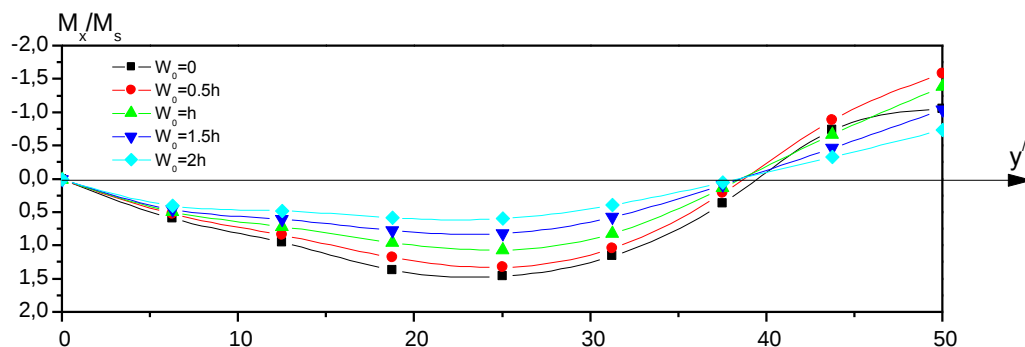


Рис. 4.49. Эпюра приведенных изгибающих моментов пластины при $\bar{q} = 29,76$

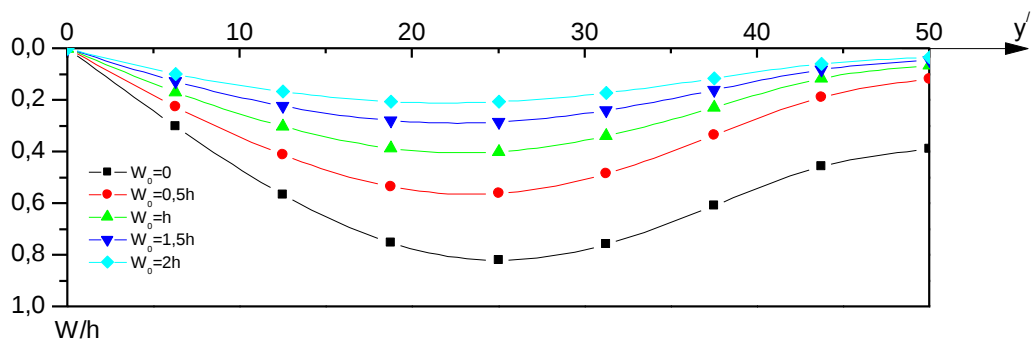


Рис. 4.50. Эпюра приведенных прогибов по оси симметрии пластины при $\bar{q} = 29,76$

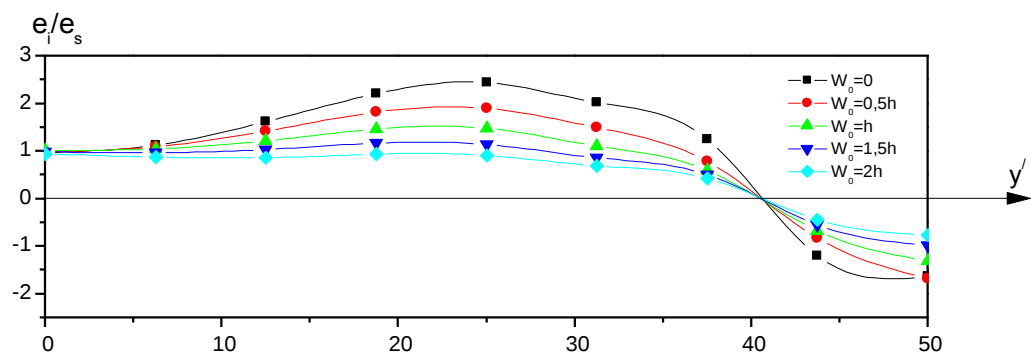


Рис. 4.51. Эпюра приведённой интенсивности деформаций по оси симметрии пластины при $\bar{q} = 29,76$

Анализ представленных выше (рис. 4.49-4.51) результатов исследования ребристой пластины показал, что с увеличением начального прогиба изгибающие моменты, прогибы и интенсивность деформаций уменьшаются.

Жёсткость рассматриваемых пластин при разном начальном прогибе определялась по графикам зависимости приведённого прогиба в центре панели (рис. 4.52) и в центре пластины (рис. 4.53) от поперечной приведённой нагрузки $\bar{q}$.

Деформированное состояние рассматриваемой пластины анализировалось по графикам зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » при разных начальных прогибах центра пластины ($W_0 = 0; 0.5h; h; 1.5h; 2h$), построенных для нижних волокон центра панели (рис. 4.54), для верхних волокон центра пластины (рис. 4.55).

Анализ результатов исследований, представленных выше, показал, что с увеличением начального прогиба центра пластины вертикальные перемещения и интенсивность деформаций уменьшаются (рис. 4.54 - 4.55).

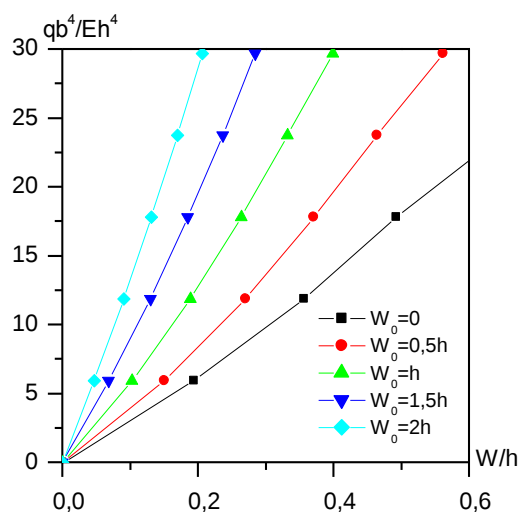


Рис. 4.52. График зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » центра панели

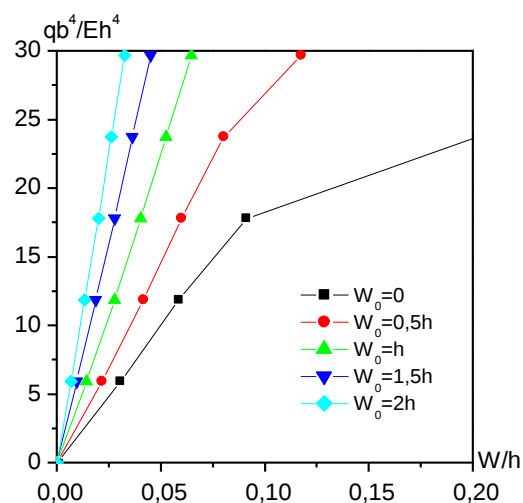


Рис. 4.53 График зависимости « $\bar{q} - \bar{W}$ » центра пластины

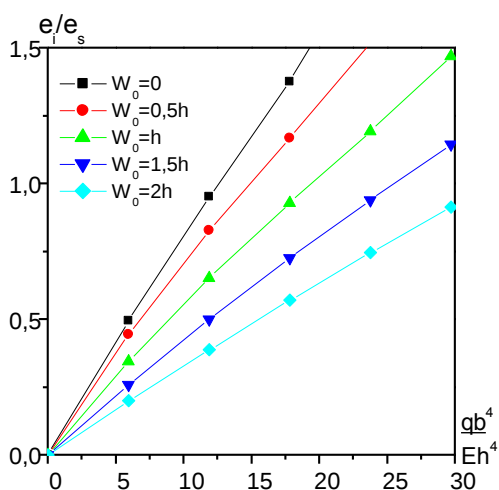


Рис. 4.54. График зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » нижних волокон центра панели

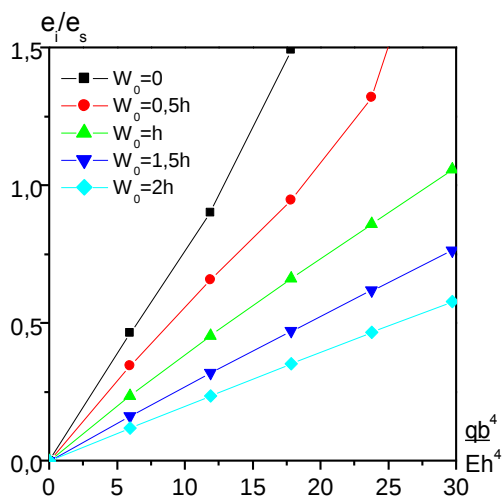


Рис. 4.55. График зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » верхних волокон центра пластины

Для анализа напряжённо-деформированного состояния по оси симметрии пластины построены эпюры приведенных прогибов (рис. 4.56), приведенной интенсивности деформаций (рис. 4.57) при разном начальном прогибе в зависимости от возрастающей приведённой нагрузки ($\bar{q} = 5,94 \div 29,76$). Построены зоны по толщине подкрепленной пластины с начальным прогибом (рис. 4.58).

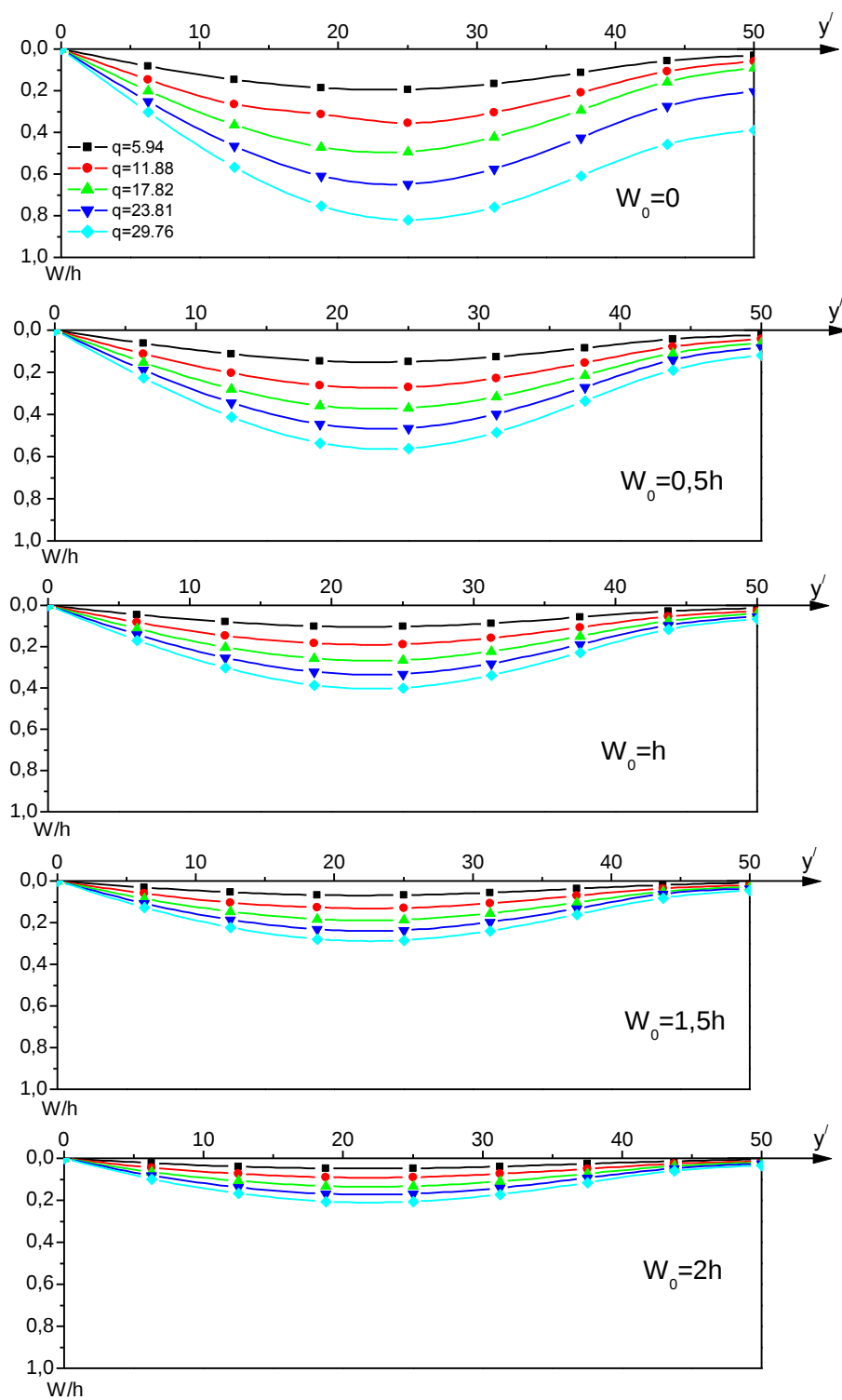


Рис. 4.56. Эпюры приведённых прогибов пластины с разным начальным прогибом при нагрузке $\bar{q} = 5,94 \div 29,76$

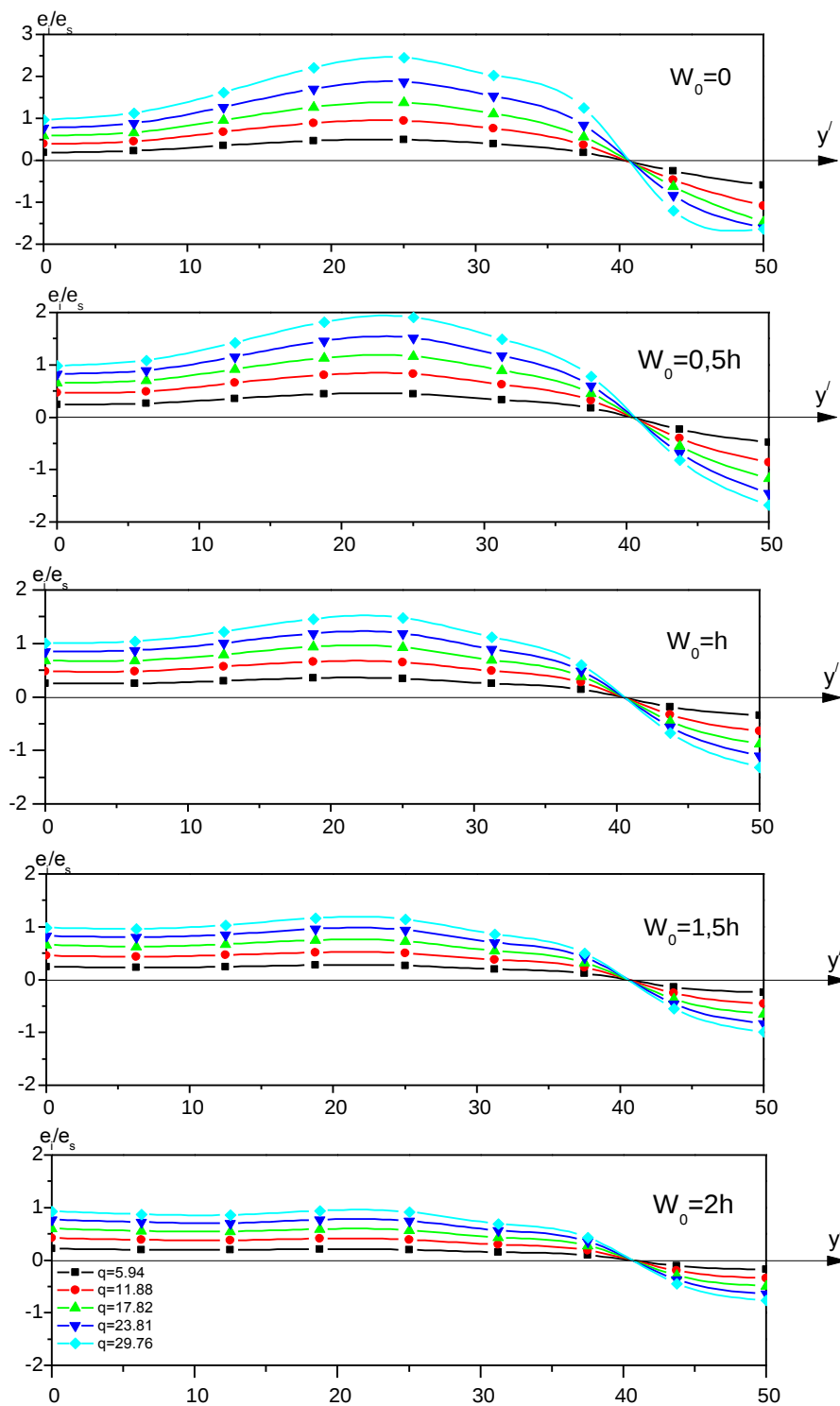


Рис. 4.57. Эпюры приведённой интенсивности деформаций пластины с разным начальным прогибом при нагрузке $\bar{q} = 5,94 \div 29,76$

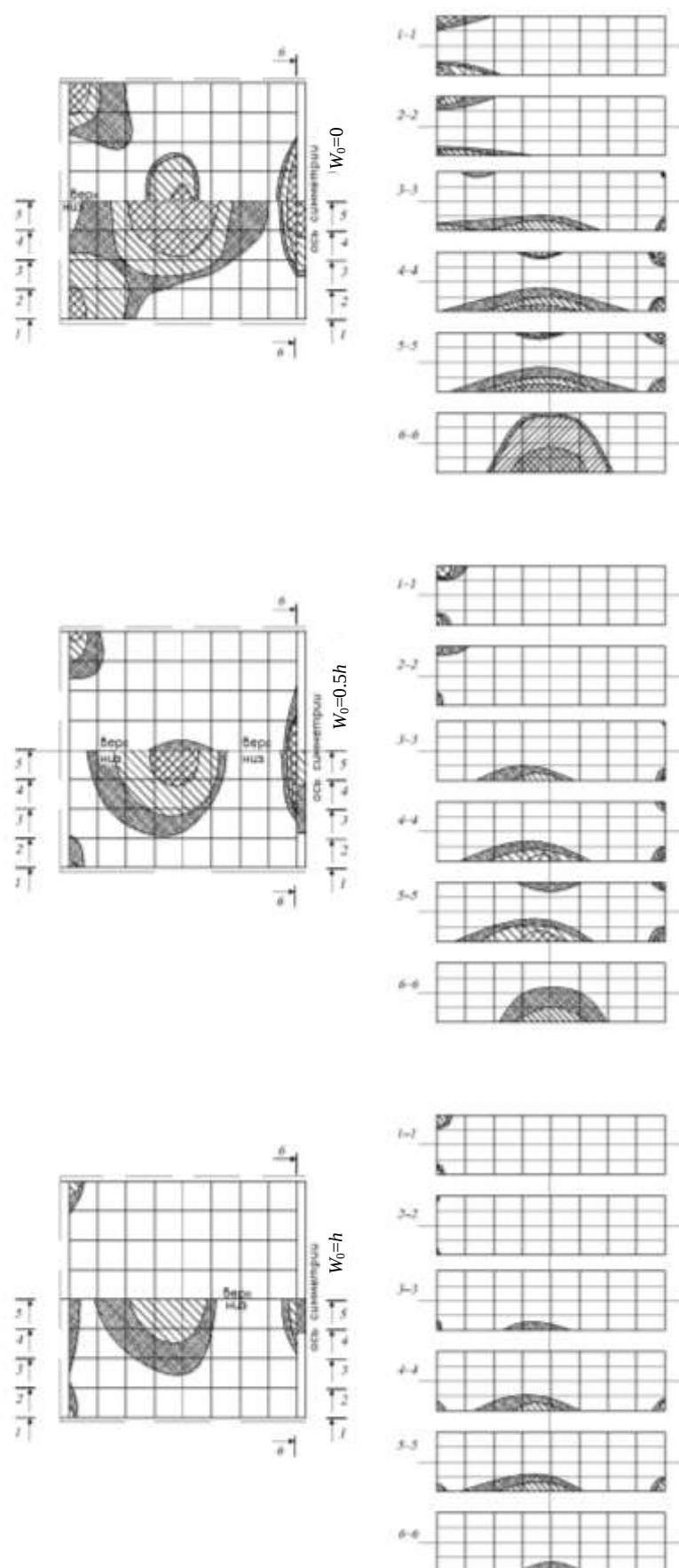


Рис. 4.58. Зоны пластичности по верхней и нижней поверхностям и толщине пластины с разным начальным прогибом при нагрузке $\bar{q} = 17,82$ (▨); $\bar{q} = 23,81$ (▧); $\bar{q} = 29,76$ (▩)

Общий анализ результатов расчёта гибкой пластины, подкреплённой ребром, поставленным с эксцентриситетом и имеющим начальный прогиб, показал:

- при действии нагрузки на пластину можно исключить появление зон пластичности за счёт изменения начального прогиба центрального ребра. Так, например, при $W_0 = h$ (рис. 4.58) верхние волокна почти не имеют пластических деформаций (небольшая зона в угловой части пластины);

- увеличение начального прогиба пластины приводит к увеличению вертикального перемещения пластины. При этом дополнительные вертикальные перемещения и деформация (а соответственно и напряжения) пластины уменьшаются, также уменьшаются изгибающие моменты (рис. 4.49 – 4.51). Так под действием максимальной нагрузки $\bar{q} = 29,76$ при $W_0 = 0$ в центре первой панели дополнительное перемещение составило $W/h = 0,82$, интенсивность деформаций – $e_i / e_s = 2,5$, а для варианта $W_0 = 2h$, дополнительное вертикальное перемещение пластины – $W/h = 0,2$, интенсивность деформаций – $e_i / e_s = 0,9$ (рис. 4.56, 4.57). Объясняется это тем, что при увеличении положительного начального прогиба форма пластины близка к пологой оболочке, и конструкция становится более жёсткой. Увеличивается влияние мембранных составляющих деформаций;

- во всех рассмотренных случаях расчётов, для подкреплённых гибких пластин с начальным прогибом с ростом поперечной нагрузки интенсивность деформаций плавно возрастает. Это указывает на активную деформацию конструкции и нагружение, близкое к простому. При этом выполняются необходимые условия применения теории малых упругопластических деформаций, что позволяет считать полученные результаты близкими к реальным;

- так как рассматриваемое начальное смещение сравнимо с толщиной пластины, то неучёт физической и геометрической нелинейности даёт существенную погрешность при определении напряжённо-деформированного состояния.

4.5. Определение напряжённо-деформированного состояния подкреплённой пластины с начальным прогибом со свойствами материала, зависящими от температуры

Тонкостенные конструкции широко применяются в различных областях техники и строительства, которые в процессе эксплуатации находятся под действием не только силовых нагрузок, но и температурного поля.

Воздействие высоких температур существенно влияет на НДС конструкции и механические характеристики материала. Так увеличение температуры приводит к снижению величины модуля упругости, что вызывает уменьшение жёсткости конструкции [187]. Неучёт этого фактора приводит к существенным погрешностям при расчёте НДС конструкции [95, 96]. Проектирование элементов конструкций, находящихся в неравномерном температурном поле, требует проведения более точных расчётов с учётом неоднородных свойств материала, зависящих от температуры.

Ниже приведены исследование напряжённо-деформированного состояния стальных подкреплённых пластин при нагружении несимметричной равномерно распределённой нагрузкой и воздействии температурного поля с учётом физической и геометрической нелинейностей.

4.5.1. Влияние температуры на напряжённо-деформированное состояние ребристой пластины с начальным прогибом

Представлены результаты и проведён анализ исследования напряжённо-деформированного состояния гибкой прямоугольной пластины постоянной толщины $h=1$ см с двумя одинаковыми панелями $a \times b = 50 \times 50$ (см) подкреплённой по центру ребром $h_p \times b_p = 4 \times 4$ (см). Учитывается начальный прогиб пластины, при этом максимальный начальный прогиб в центре пластины составляет $W_0 = 0,5h$ (рис.4.58). Материал пластины сталь Ст3.

При расчёте пластины определялись вертикальные перемещения W , интенсивность деформаций e_i при возрастающей поперечной равномерно

распределённой нагрузке q и температурах $t = 20; 100; 200; 300; 400$ °C. Зависимость механических свойств материала от температуры взята из работ В.П. Круглова [108], Н.И. Безухова [21] и приведена в таблице 4.9.

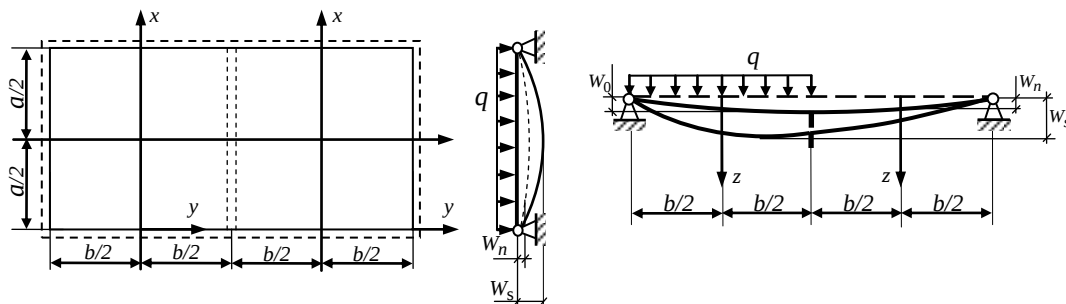


Рис. 4.58. Расчётная схема пластины

Начальный синусоидальный прогиб W_n представлен выражением (4.1). Результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния рассматриваемой гибкой пластины с начальным прогибом при разной температуре и действующей поперечной несимметричной приложенной нагрузки приведены на рис. 4.59 – 4.66.

Таблица 4.9.

Механические свойства стали Ст.3

Температура t , °C	20	100	200	300	400
Модуль упругости E , МПа	$2,1 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	$1,88 \cdot 10^5$	$1,72 \cdot 10^5$	$1,12 \cdot 10^5$
Предел текучести σ_s , МПа	240	220	210	180	140
Коэффициент линейного расширения α , $1/^\circ C$	12,0	12,1	12,2	12,8	13,5

На рис. 4.59, 4.60 представлены графики зависимости приведенного прогиба W/h от нагрузки q для центра пластины и центра левой панели при разных действующих температурах.

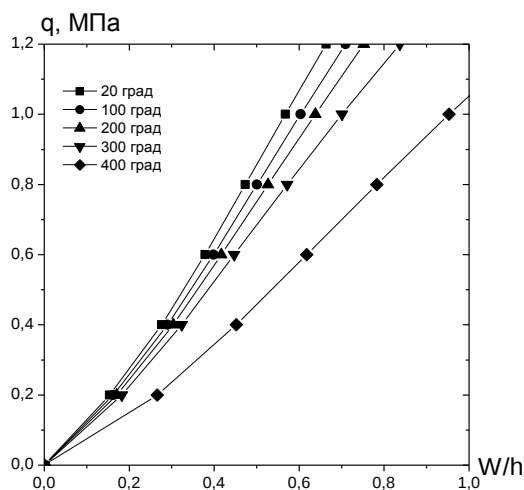


Рис. 4.59. График зависимости « $q - W/h$ » центра левой панели

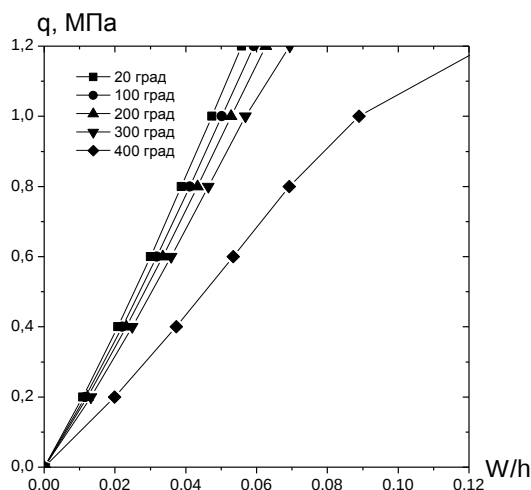


Рис. 4.60. График зависимости « $q - W/h$ » центра пластины

Графики зависимости «интенсивность напряжений - нагрузка» – « $\sigma_i - q$ », «приведённая интенсивность деформаций - нагрузка» – « $e_i/e_s - q$ » (рис. 4.59-4.66) представлены для наиболее деформируемых и напряжённых волокон пластины: нижних волокон центра нагруженной панели, нижних волокон центра пластины, нижних волокон ребра.

Наибольшие прогибы возникают в левой панели, где приложена равномерно распределенная нагрузка (рис. 4.59). Чем больше температура, тем больше прогибы. Это связано с изменением механических свойств стали. Особенно отличаются результаты при 400°C .

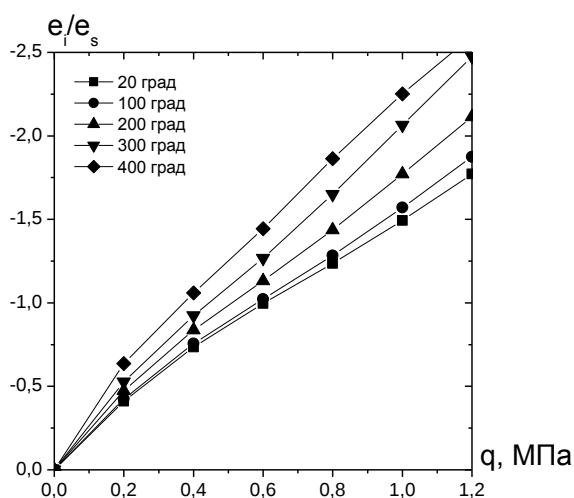


Рис. 4.61. График зависимости « $e_i/e_s - q$ » нижних волокон центра пластины

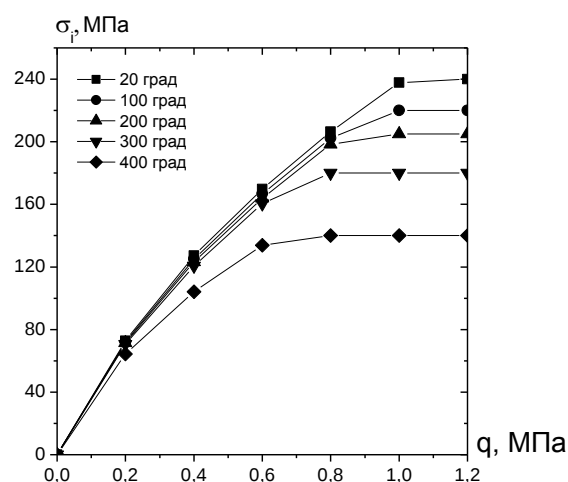


Рис. 4.62. График зависимости « $\sigma_i - q$ » нижних волокон центра пластины

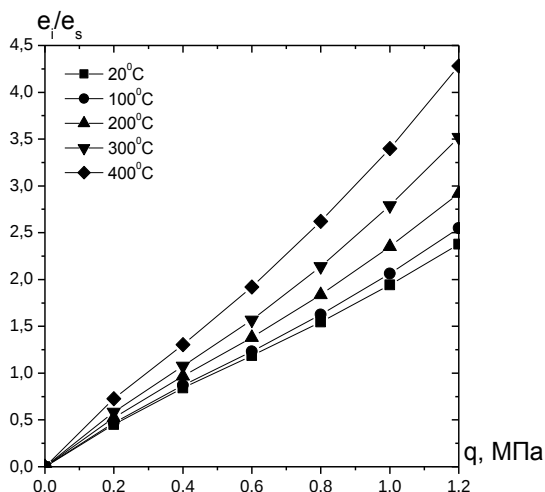


Рис. 4.63. График зависимости « $e_i/e_s - q$ »
нижних волокон центра нагруженной панели

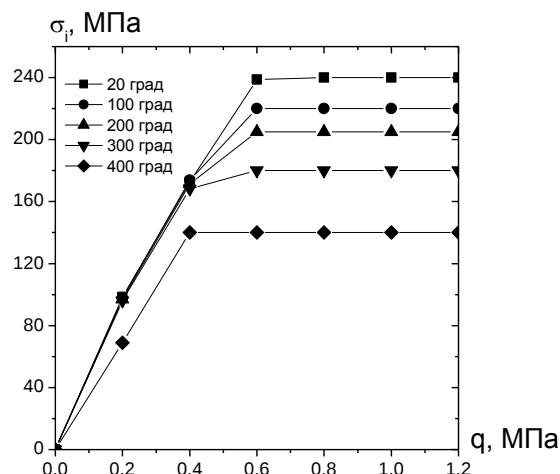


Рис. 4.64. График зависимости « $\sigma_i - q$ »
нижних волокон центра нагруженной панели

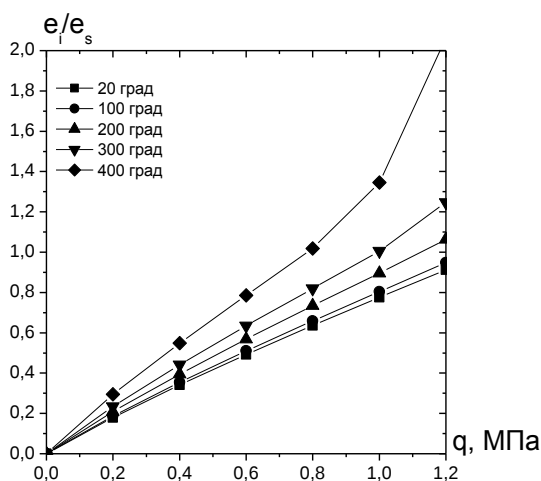


Рис. 4.65. График зависимости « $e_i/e_s - q$ »
нижних волокон ребра

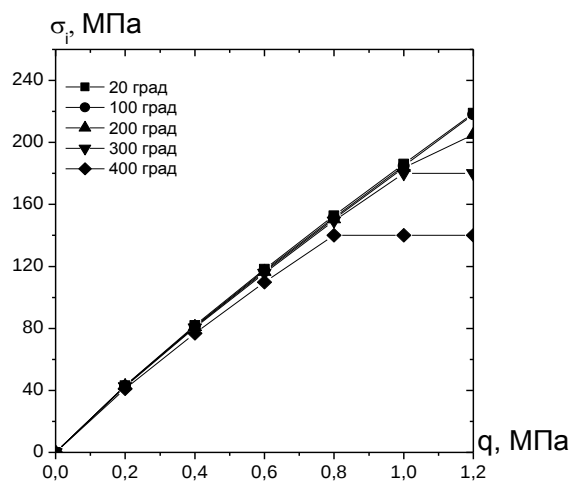


Рис. 4.66. График зависимости « $\sigma_i - q$ »
нижних волокон ребра

На рис. 4.61, 4.63, 4.65 приведены зависимости приведённой интенсивности деформаций верхних волокон центра первой панели, нижних волокон центра пластины и нижних волокон ребра жёсткости в зависимости от поперечной нагрузки q при различных значениях температуры.

На рис. 4.62, 4.64, 4.66 приведены аналогичные результаты для интенсивности напряжений.

В рассматриваемом диапазоне нагрузок пластические деформации ребра возникают при температурах больше 300°C . Наибольшие напряжения и деформации имеют место в левой панели, где приложена равномерно распределенная

нагрузка. С увеличением температуры увеличиваются перемещения и интенсивность деформаций, что обусловлено изменением механических свойств стали. Наибольшее отличие значений вертикальных перемещений, деформаций и напряжений наблюдается в пластине при действии температуры 400°C .

Анализ представленных результатов показывает, что:

Графики зависимости «приведённый прогиб - нагрузка» – « $W/h - q$ », «интенсивность напряжений - нагрузка» – « $\sigma_i - q$ », «приведённая интенсивность деформаций - нагрузка» – « $e_i/e_s - q$ », полученные при разной температуре в наиболее характерных точках (в центре панели, возле ребра, в ребре), характеризуют напряжённо-деформированное состояние рассматриваемой пластины.

При увеличении температуры механические свойства материала Ст3 значительно изменяются и пластина становится менее жёсткой, поэтому с ростом нагрузки увеличиваются все параметры НДС, в частности, прогибы и интенсивность деформаций.

При возникновении пластических деформаций графики интенсивности напряжений σ_i в зависимости от нагрузки q и действующей температуры становятся неинформативными (рис.4.62, 4.64, 4.66), так как для стали Ст3 интенсивность напряжений становится постоянной за пределом упругости материала (диаграмма Прандтля). Необходимую информацию для анализа напряжённо-деформированного состояния дают графики приведённой интенсивности деформаций e_i/e_s в зависимости от нагрузки q и действующей температуры (рис. 4.61, 4.63, 4.65).

Все полученные зависимости нелинейные. Если продолжить начальные зависимости на графиках линейно, то получаем линейное решение, которое значительно отличается от нелинейного. Таким образом, результаты расчёта указывают на необходимость учёта физической и геометрической нелинейности.

4.5.2. Влияние изменяющейся по полю температуры на напряжённо-деформированное состояние подкреплённой пластины с начальным прогибом

Исследуется упругое и упругопластическое НДС стальной пластины с начальным прогибом, находящейся в неравномерном температурном поле [138]. Расчётная схема представлена на рис. 4.67.

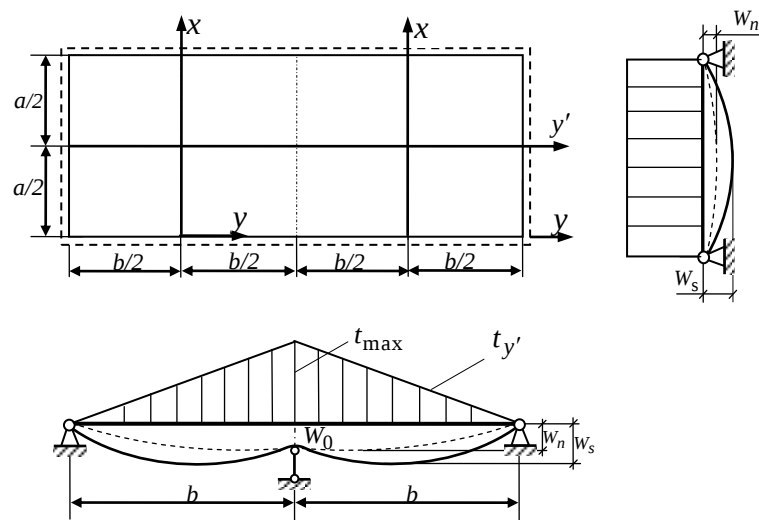


Рис. 4.67. Расчётная схема пластины

Пластина постоянной толщины $h = 1$ см в центре подкреплёна опорой и разделена на две панели размером ($a \times b = 50 \times 50$ (см)) каждая.

Температура по полю изменяется согласно зависимости:

$$t_y = (-1)^{k-1} \frac{y + b/2}{b} \cdot t_{\max}.$$

Здесь k – номер панели. Расчёт проведён для следующих значений температуры: $t_{\max} = 20; 100; 200; 300; 400, ^\circ\text{C}$.

Для анализа НДС пластины, находящейся в неравномерном температурном поле, определялись прогибы и интенсивность деформаций, характеризующие прочность и жёсткость двухпанельной пластины в зависимости от величины и знака начального прогиба. Начальный синусоидальный прогиб W_n представлен выражением (4.1). Максимальный начальный прогиб в центре пластины принимался равным $W_0 = -h; 0; +h$.

Модель Гольденблата-Николаенко позволяет учитывать зависящие от температуры характеристики материала путем построения аппроксимирующих зависимостей.

Значения механических характеристик материала Ст3 при разных температурах приведены в таблице 4.9.

Чтобы наиболее полно оценить несущую способность конструкции при расчёте одновременно учитывались физическая и геометрическая нелинейности.

Температурные перемещения W определялись методом Ритца с использованием метода перемещений. Также определялись полные прогибы w_s пластины, получаемые суммированием начального прогиба W_n и температурных перемещений W .

Для анализа влияния температурного поля на вертикальные перемещения и интенсивность деформаций пластин с начальным прогибом представлены эпюры этих параметров НДС.

Результаты расчёта НДС рассматриваемой гибкой пластины с начальным прогибом, находящейся в неравномерном температурном поле, приведены на рис. 4.68, 4.69, 4.70. Ввиду симметрии пластины и температуры представлены эпюры только для левой панели.

На рис. 4.68 изображены эпюры прогибов W вдоль оси симметрии пластины при $W_0 = +h; 0; -h$ при разных значениях температуры. Для наглядности результаты представлены в виде таблицы (табл.4.10).

Таблица 4.10

Прогибы W центра панели

$t, ^\circ C$ W_0	$100^\circ C$	$200^\circ C$	$300^\circ C$	$400^\circ C$
$W_0 = 0$	$0,021h$	$0,79h$	$1,14h$	$1,38h$
$W_0 = +h$	$0,11h$	$0,57h$	$0,82h$	$1,03h$
$W_0 = -h$	$0,25h$	$0,57h$	$0,82h$	$1,03h$

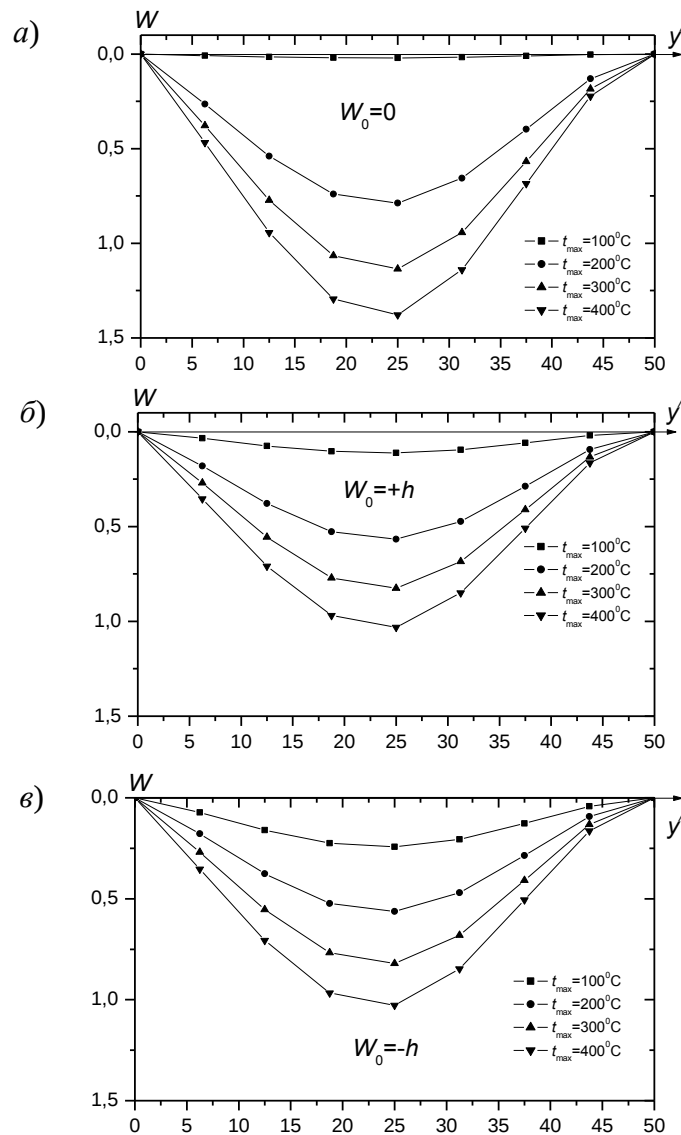


Рис. 4.68. Эпюры прогибов W левой панели пластины при разном температурном воздействии с начальным прогибом W_0 :
 а) $W_0 = 0$; б) $W_0 = +h$; в) $W_0 = -h$

Из представленных эпюр следует, что в центре панели максимальные прогибы W пластины возникают с увеличением температуры при $W_0 = 0$.

Из таблицы 4.10 видно, что при температуре $100^\circ C$ разница между вертикальными перемещениями при различных начальных прогибах составляет более 100%, с ростом температуры эта разница уменьшается и составляет при $200^\circ C$ – 28% , а при $400^\circ C$ – 25%. При этом наблюдается: при температуре $100^\circ C$ температурные перемещения W в пластине с положительным началь-

ным прогибом меньше, чем при отрицательном, а при 200°C и более, вертикальные перемещения W не зависят от знака начального прогиба.

На рис. 4.69 изображены эпюры суммарных прогибов W_s пластины, зависящих от величины начального прогиба ($W_0 = +h$; 0 ; $-h$), при температурах 100°C и 400°C .

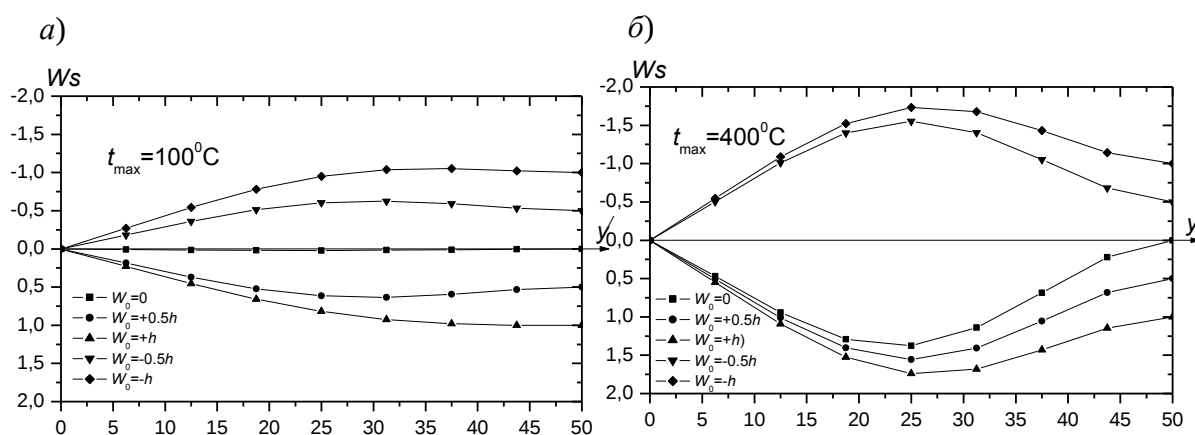


Рис. 4.69. Эпюры суммарных прогибов W_s левой панели пластины с разным начальным прогибом W_0 при температурном воздействии:

а) $t_{\max} = 100^{\circ}\text{C}$; б) $t_{\max} = 400^{\circ}\text{C}$

В таблице 4.11 представлены результаты расчёта.

Таблица 4.11

Суммарные прогибы W_s центра панели

$W_0 \backslash t, ^{\circ}\text{C}$	100°C	200°C	300°C	400°C
$W_0 = 0$	$0,021h$	$0,79h$	$1,14h$	$1,38h$
$W_0 = +h$	$0,82h$	$1,27h$	$1,53h$	$1,74h$
$W_0 = -h$	$0,95h$	$1,27h$	$1,53h$	$1,73h$

Увеличение температуры приводит к увеличению суммарных прогибов W_s . При $W_0 = 0$ наблюдается значительный рост W_s . При $W_0 = +h$ суммарный прогиб увеличился в 2,1 раза, а при $W_0 = -h$ увеличение W_s составило 1,8 раза (табл. 4.11).

На рис. 4.70 представлены эпюры приведённой интенсивности деформаций верхних и нижних волокон левой панели пластины в зависимости от

температуры для разных значений начального прогиба W_0 .

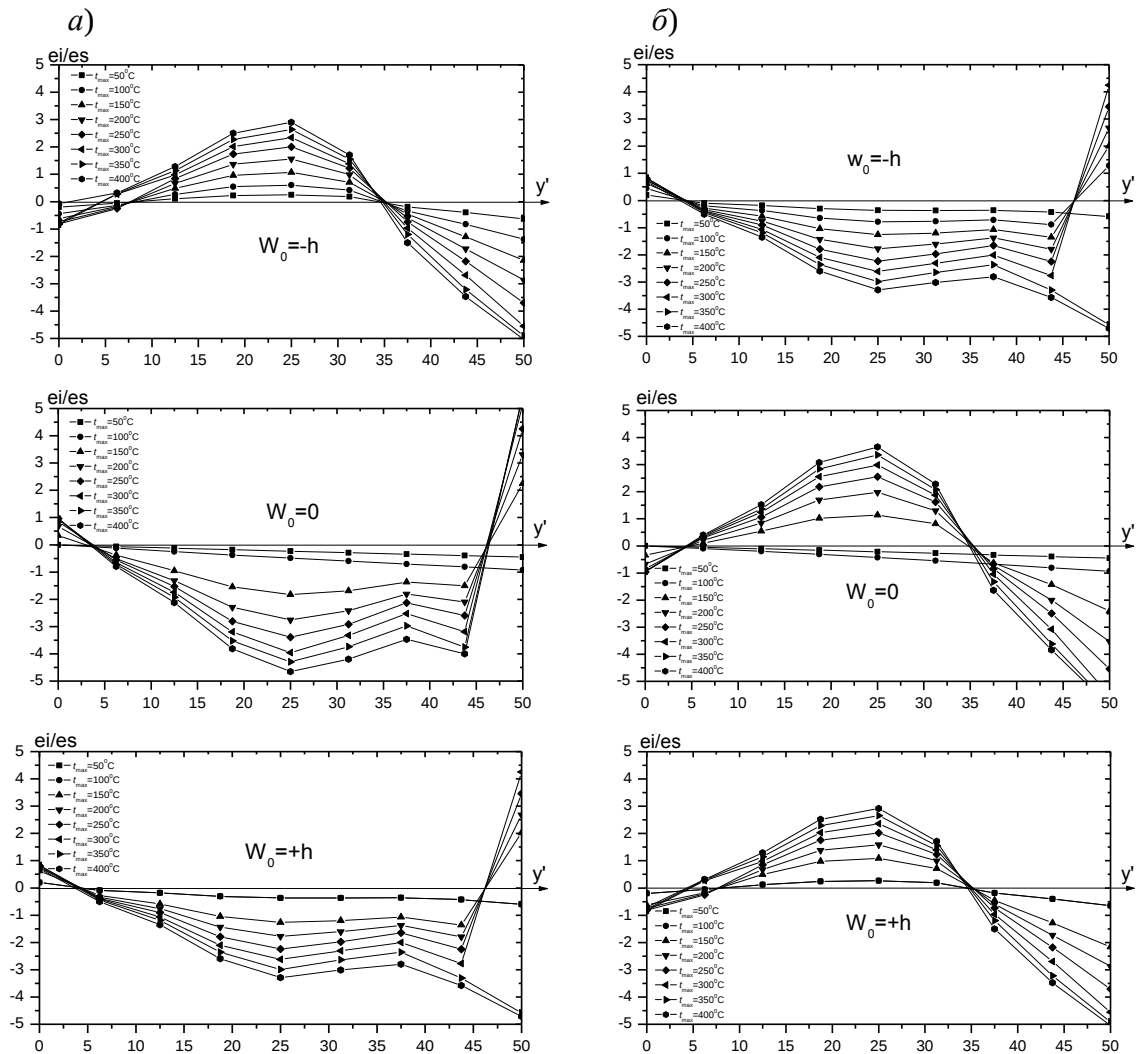


Рис. 4.70. Эпюры приведённой интенсивности деформаций левой панели при различных W_0
а) для верхних волокон; б) для нижних волокон

В таблицах 4.12, 4.13 представлены результаты расчётов приведенной интенсивности деформаций для верхних и нижних волокон центра панели, имеющей разное значение начального прогиба.

Таблица 4.12

Интенсивности деформаций e_i/e_s верхних волокон центра панели

$t, ^\circ C$ W_0	$100^\circ C$	$200^\circ C$	$300^\circ C$	$400^\circ C$
$W_0 = 0$	-0,491	-2,753	-3,962	-4,649
$W_0 = +h$	-0,371	-1,777	-2,622	-3,289
$W_0 = -h$	0,604	1,566	2,344	2,9

Таблица 4.13

Интенсивности деформаций e_i / e_s нижних волокон центра панели

$t, ^\circ C$ W_0	$100^\circ C$	$200^\circ C$	$300^\circ C$	$400^\circ C$
$W_0 = 0$	-0,423	1,978	2,982	3,655
$W_0 = +h$	0,263	1,586	2,361	2,919
$W_0 = -h$	-0,781	-1,771	-2,614	-3,287

Из анализа эпюр (рис. 4.70) следует, что при температуре более $200^\circ C$ в пластинах, имеющих начальный прогиб значения приведённой интенсивности деформаций в центре панели меньше, чем в пластине без начального прогиба.

При температуре до $100^\circ C$ значения приведённой интенсивности деформаций в центре пластины с отрицательным начальным прогибом больше, чем в пластинах с положительным начальным прогибом. При температуре $200^\circ C$ и выше, приведённая интенсивность деформаций больше в пластинах без начального прогиба, а в пластинах с прогибом значения приведённой интенсивности деформаций отличаются незначительно (при $W_0 = +h$ $e_i / e_s = 1,777$, при $W_0 = -h$ $e_i / e_s = 1,566$).

На основании проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

При температуре $100^\circ C$ вертикальные перемещения W в пластине с положительным начальным прогибом меньше, чем при отрицательном, а при температуре $200^\circ C$ и более, вертикальные перемещения W не зависят от знака начального прогиба. Это связано с развитием малых упругопластических деформаций и увеличением влияния усилий в срединной плоскости в связи с уменьшением изгибной жёсткости пластины от температурного воздействия.

При рассматриваемом температурном воздействии положительные начальные прогибы приводят к уменьшению интенсивности деформаций в верхних волокнах на центральной опоре по сравнению с пластиной без

начального прогиба. Отрицательные начальные прогибы уменьшают интенсивность деформаций нижних волокон на центральной опоре.

4.6. Выводы по четвёртой главе

Представлены результаты исследования напряжённо-деформированного состояния шарнирно опертых пластин, выполненных из материала Ст3 и пологой цилиндрической оболочки, выполненной из материала Д16Т, с начальным прогибом при действии равномерно распределённой поперечной нагрузки и температурного воздействия.

Исследовалось:

- влияние знака начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние несимметрично нагруженных пластин разной относительной толщины;
- влияния начального симметричного прогиба и рёбер разной жёсткости на напряжённо-деформированное состояние шарнирно закреплённой цилиндрической полой оболочки;
- влияние разной величины смещения центральной опоры на напряжённо-деформированное состояние гибкой пластины при действии поперечной симметричной нагрузки;
- влияние величины положительного начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние гибкой пластины, подкреплённой центральным ребром, при действии симметричной поперечной нагрузки;
- влияние температурного воздействия разной величины на напряжённо-деформированное состояние пластин, имеющих начальный прогиб и находящихся под действием несимметричной поперечной нагрузки.

В зависимости от рассматриваемой задачи, расчёт вёлся в линейной постановке, с учётом геометрической нелинейности, с учётом физической нелинейности и при совместном учёте физической и геометрической нелинейностей.

Прогибы и интенсивности деформаций, полученные при линейном решении, существенно отличаются от прогибов и интенсивностей деформаций, полученных с учётом физической и геометрической нелинейностей, особенно с уменьшением толщины пластины.

Анализ результатов расчёта прямоугольных пластин, подкреплённых по центру ребром, показал, что при линейном расчёте без учёта начального прогиба в пределах упругости для пластин с толщиной h , результаты отличаются от геометрически нелинейного решения в пределах 5 %. Для более тонких пластин достаточно проводить расчёт с учётом геометрической нелинейности. Такая же зависимость наблюдается при положительном начальном прогибе.

При отрицательном начальном прогибе необходим учет геометрической нелинейности и при толщине h .

Расчёты по определению параметров НДС за пределом упругости материала для пластин с толщиной $1,5h$ можно проводить с учётом физической нелинейности без учёта геометрической нелинейности. Зависимости величин прогиба и интенсивности деформаций от нагрузки для пластин толщиной меньше h близки к линейным зависимостям до величины нагрузки, превышающей нагрузку начала текучести в 1,5 раза. Для пластин толщиной более $0,7h$ величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние, близки к полученным значениям с учётом геометрической нелинейности. Объясняется это тем, что пластины толщиной $0,7h$ близки к мембранам, в которых изгибными деформациями пренебрегаю в виду малости этих деформаций.

Во всех рассмотренных случаях расчёта до величины нагрузки, превышающей нагрузку начала текучести в 2,5 раза представленные зависимости « $\bar{W} - \bar{q}$ » и « $\bar{\epsilon}_i - \bar{q}$ », характеризующие напряжённо-деформированное состояние пластины, плавно возрастают. Это указывает на активное простое нагружение. То есть, выполнялись необходимые условия применения теории малых упругопластических деформаций. Это позволило считать полученные результаты, соответствующие действительности [85].

Анализ результатов расчёта подкреплённой цилиндрической оболочки показал, что при положительном начальном прогибе пластические деформации больше развиваются по поверхностям, особенно в нижних волокнах, как при слабых рёбрах, так и при сильных рёбрах жёсткости. Наиболее развиты пластические деформации по толщине оболочки в центральной части.

При слабых рёбрах жёсткости с отрицательным центральным начальным прогибом зона пластичности пронизывает всю толщину оболочки в четвертях по диагонали. Это указывает на большее влияние мембранных усилий, по сравнению с изгибающими моментами. При сильных рёбрах жёсткости с отрицательным начальным прогибом зоны пластичности развиваются на нижней поверхности в угловых частях оболочки, а при положительном – по диагонали.

Не зависимо от жёсткости подкрепляющих рёбер более деформируемой является оболочка с положительным начальным прогибом. Однако оболочка с отрицательным начальным прогибом теряет устойчивость «в большом» и начинает деформироваться после потери устойчивости более активно.

Для нижней поверхности цилиндрической пологой оболочки, подкреплённой слабыми ребрами жёсткости, отметим разные знаки приведённой интенсивности деформаций. Это происходит оттого, что при положительном начальном прогибе нижние волокна рассматриваемой оболочки растягиваются, а при отрицательном – сжимаются. Более напряжённой в рассматриваемом центральном сечении, является оболочка с положительным начальным прогибом.

Анализ результатов расчёта прямоугольной пластины с центральной разделяющей шарнирной опорой и пластины, подкреплённой поставленным с эксцентриситетом ребром жёсткости, показал, что увеличение смещения центральной опоры при возрастании приведённой поперечной нагрузки приводит к уменьшению дополнительных прогибов, деформаций, а соответственно продольных, поперечных усилий и изгибающих моментов.

При определённых значениях действующей на пластину нагрузки можно исключить появление зон пластичности за счёт изменения положения центральной опоры.

Исследование напряжённо-деформированного состояния стальной подкреплённой пластины постоянной толщины $h=1$ см с начальным прогибом $W_0 = 0,5h$ в центре пластины на действие несимметричной нагрузки и температурного воздействия с учётом физической и геометрической нелинейностей показало, что при увеличении температуры уменьшаются значения модуля упругости и предела текучести материала Ст3, пластина становится менее жёсткой, увеличиваются прогибы и интенсивность деформаций. При расчёте рассматриваемых пластин необходим учёт физической и геометрической нелинейностей в зависимости от температуры.

Увеличение положительного начального прогиба увеличивает жёсткость пластины. Так как рассматриваемое начальное смещение сравнимо с толщиной пластины, то неучёт физической и геометрической нелинейностей даёт существенную погрешность при определении компонентов напряжённо-деформированного состояния.

Качественные результаты зависимости напряжённо-деформированного состояния от величины начальных прогибов и температурного воздействия, полученные в примере, справедливы для любых аналогичных тонкостенных подкреплённых пластин, пологих оболочек и систем из них.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты исследований, проведённых в диссертации, заключаются в следующем.

1. Разработана в аналитической форме физико-математическая модель расчёта пологих оболочек и пластин, нагруженных поперечной нагрузкой, позволяющая одновременно учитывать начальный прогиб, физическую и геометрическую нелинейности, температурное воздействие при ограниченных пластических деформациях. Методика основана на энергетическом методе с применением функционала Лагранжа.

2. Обоснован метод линеаризации физических уравнений на каждом этапе приближения, позволяющий учитывать начальный прогиб элементов, физическую и геометрическую нелинейность, силовую нагрузку и действие температуры.

3. Обосновано применение метода сопряженных градиентов и метода переменных параметров упругости нелинейной модели В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, позволяющих учитывать начальные прогибы элементов конструкции.

4. Разработана компьютерная программа для определения НДС подкреплённых прямоугольных пластин и пологих оболочек с начальными прогибами при действии поперечной нагрузки с учётом физической и геометрической нелинейностей.

5. Исследована точность и сходимость разработанного алгоритма. Показано, что для определения НДС подкреплённых упругих прямоугольных пластин и пологих оболочек с погрешностью до 5 % достаточно взять три, а для упруго-пластического расчёта пять членов ряда функций перемещений с сеткой, равной одной двенадцатой соответствующего размера конструкции.

6. Получены, проанализированы и систематизированы результаты расчёта подкреплённых прямоугольных пластин и пологих оболочек с начальным прогибом с учётом физической и геометрической нелинейностей, нагруженных распределённой нагрузкой.

7. Исследовано влияние на НДС начальных прогибов подкреплённых пластин, полой оболочки и конструкций из них, нагруженных распределённой поперечной нагрузкой, при перемещениях, сравнимых с толщиной пластины, и ограниченных пластических деформациях с учётом физической и геометрической нелинейностей.

Показана необходимость учёта начальных отрицательных прогибов, приводящих к большим значениям интенсивности деформаций и увеличению вертикальных перемещений W , по сравнению с нулевыми или положительными начальными прогибами. При исследовании влияния начального прогиба на НДС полой цилиндрической оболочки установлено, что более деформируемой является оболочка с положительным начальным прогибом.

8. Установлено влияние температуры (от 20°C до 400°C) на напряжённо-деформированное состояние подкреплённых пластин с начальным прогибом и ограниченными значениями пластических деформаций. Показано, что с повышением температуры увеличиваются прогибы и интенсивность деформаций.

9. Установлено, что при упругопластическом расчёте подкреплённых пластин и оболочек при действии нагрузки, превышающей нагрузку, вызывающую начало текучести, необходимо учитывать начальный прогиб, физическую и геометрическую нелинейности и изменение механических свойств материала при действии температурной нагрузки.

Дальнейшее развитие исследований видится в развитии предложенного численно-аналитического метода для расчёта нагруженных силовой нагрузкой подкреплённых пластин и полых оболочек с учётом нелинейностей и ползучести материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский Н.П. Неоднородные анизотропные оболочки / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев. – Красноярск: КПИ, 1977. – 125 с.
2. Абовский Н.П. Численные методы в теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга, В.И. Саченков – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1986. – 384 с.
3. Александров А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
4. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1982. – 320 с.
5. Амиро И.Я. Устойчивость ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, О.А. Грачёв, В.А. Заруцкий и др. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 160 с.
6. Амиро И.Я. Устойчивость цилиндрических оболочек несовершенной формы / И.Я. Амиро, П.С. Поляков, В.Г. Паламарчук // Прикладная механика. – 1971. – 7, № 8. – С. 9-15.
7. Амиро И.Я. Экспериментальные исследования устойчивости ребристых оболочек: обзорная информация / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикладная механика. – 1996. – 32, № 9. – С. 3-15.
8. Андреев В.И. Физически-нелинейные задачи механики неоднородных материалов / В.И. Андреев, Л.С. Полякова // Развитие фундаментальных основ науки и образования в строительстве: Сборник тезисов XIV Международной научно-практической конференции, Москва, 18 мая 2017 года. – Москва: Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 2017. – С. 12-14.
9. Андреев В.И. Механика неоднородных тел / В.И. Андреев. Москва: изд-во Юрайт 2018. – 255 с.
10. Андреев Н.П. О сходимости вариационно-разностного метода расчета неоднородных анизотропных оболочек / Н.П. Андреев // Простран-

ственные конструкции в Красноярском крае: Межвуз. тем. сб. науч. тр.: КПИ. – Красноярск, 1979. – С. 144-156.

11. Антоненко Э.В. Модели подкрепленного стыка двух тонкостенных цилиндров разной толщины / Э.В. Антоненко, Т.Э. Шульга // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. – № 4–2. – С. 303–307.

12. Арбоч Вильямс Исследование несовершенств формы оболочки диаметром 3 м/ Арбоч Вильямс// Ракет. техн. и космонавтика. – 1977. – 15, № 7. – С. 68-77.

13. Арутюнян Н.Х. Теория ползучести неоднородных тел / Н.Х. Арутюнян, В.Б. Колмановский. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

14. Аттальман Ю. А. Влияние начальных несовершенств конструкций двухпоясных сетчатых куполов на их несущую способность: дис. ... канд. техн. наук / Ю. А. Абусамра Аттальман. – Ростов на Дону, 2006. – 148 с.

15. Аттетков А.В. Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 440 с.

16. Бабешко М.Е. О методе последовательных приближений решения краевых задач пластичности с учетом вида напряженного состояния / М.Е. Бабешко, Ю.Н. Шевченко // Прикладная механика. – 2010. – 46, № 7. – С. 11–22.

17. Бабич Д.В. О напряженно-деформированном состоянии тонкостенных конструкций при радиационных воздействиях / Д.В. Бабич // Прикладная механика. – 2003. – 39, № 8. – С. 95-103.

18. Бабич Д.В. Об устойчивости оболочек вращения с малыми отклонениями от цилиндрической формы / Д.В. Бабич, Л.А. Дериглазова // Прикладная механика. – 1984. – 20, № 12. – С. 106-108.

19. Баженов В. А. Конечно-элементное моделирование процессов нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных тонкостенных конструкций при действии термосиловых нагрузок / В.А. Баженов, О.П. Кривенко // Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций: труды Международной

молодежной научной конференции, посвящённой 55-летию РУДН, Москва, 18–21 ноября 2014 года. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2014. – С. 55-64.

20. Барашков В.Н. Алгоритм реализации задач теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Часть I / В.Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 3. – С. 23-28.

21. Безухов Н.И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко, А.М. Синкзов – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.

22. Белов А.В. Расчет пластин и оболочек с учетом повреждаемости материалов при ползучести и высокотемпературной коррозии / А.В. Белов, А.А. Поливанов, А.Г. Попов // Современные проблемы науки и образования. – 2008. – № 6. – С. 9–13.

23. Биргер И.А. Метод переменных параметров упругости в задачах теории пластин и оболочек / И.А. Биргер // Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Том 1. – Ереван, 1980. – С. 179-185.

24. Биргер И.А. Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести / И.А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М., 1975. – С. 61-73.

25. Бирюков О.В. Ползучесть и длительная прочность оболочечных конструкций в условиях терморadiационных полей / О.В. Бирюков, С.М. Школьный // Проблемы машиностроения. – Киев: Наукова думка, 1987. – Вып. 28. – С. 45-51.

26. Богданович А.Е. Анализ выпучивания цилиндрических оболочек со случайным полем начальных несовершенств при осевом динамическом сжатии / А.Е. Богданович, С.П. Юшанов // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 821-831.

27. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин – М.: Госстройиздат, 1965. – 279 с.
28. Бондарь В.С. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном неизотермическом нагружении в условиях ионизирующего излучения / В.С. Бондарь // Расчеты на прочность. – Москва, 1989. – № 29. – С. 23-29.
29. Борzych Е.П. Исследование влияния начальных несовершенств срединной поверхности на напряженно-деформированное состояние пологих ортотропных оболочек / Е.П. Борzych, Г.К. Хайдуков, В.В. Шугаев // Теория оболочек и пластин: сб. трудов – М.: Наука, 1973. – С. 619-621.
30. Бородин, В.А. Температурная зависимость скорости упругости ползучести облучаемых материалов. / В.А. Бородин, А.И. Рязанов. – Ин-т атом. энергии. Москва: Препринт. 1983. – № 3771/11. – 60 с.
31. Броуде Б.М. О влиянии начального искривления на устойчивость круговой цилиндрической оболочки / Б.М. Броуде // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1963. – № 1. – С. 32-41.
32. Бубнов, И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды / И.Г. Бубнов. – СПб. : Типо-Литография, 1904. – 183 с.
33. Букша В.В. Пластины и пологие оболочки при начальном изгибании опорного контура / В.В. Букша, О.В. Машкин, В.В. Рогалевич – Екатеринбург: Изд-во АМБ, 2007. – 360 с.
34. Вайнберг Д.В. Исследование гибких пластин и оболочек / Д.В. Вайнберг, А.С. Сахаров, А.Л. Синявский // Расчёт пространственных конструкций. – М., 1971. – Вып. 14. – С. 35-51.
35. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин / Д.В. Вайнберг. – Киев: Будівельник, 1973. – 488 с.
36. Виноградова Т.П. Упруго-пластический изгиб гибких пластин с начальной погибью / Т.П. Виноградова // Строительная механика и строительные конструкции. Материалы научной конференции. Горький: ГИСИ, 1972. –С.11-12.

37. Власов В.З. Избранные труды. Т.3. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. – М.: Наука, 1964. – 472 с.
38. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике / В.З. Власов – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
39. Вольмир А.С. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований / А.С. Вольмир, Б.А. Куранов, А.Т. Турбаивский – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с.
40. Выборнов В.Г. Некоторые задачи устойчивости тонких пластин и оболочек с учетом начальных неправильностей / В.Г. Выборнов // Исследования по теории пластин и оболочек: сб. IV, Казань, КГУ. –1966. – С. 207-228.
41. Гавриленко Г.Д. Докритическое состояние несовершенных ребристых оболочек / Г.Д. Гавриленко, В.И. Мещнер // Совершенствование технической эксплуатации корпусов судов: Тез. докл. Всесоюз. НТК, посвященной 80-летию проф. А.Г. Архангородского. – Калининград, окт., 1989. – Л.: 1989. – С. 77.
42. Гавриленко Г.Д. Определение критических нагрузок неидеальных моделей оболочек / Г.Д. Гавриленко, А.С. Пальчевский, Ю.Е. Якубовский // Прикладная механика. – 1985. – 21, № 6. – С. 68-72.
43. Гавриленко Г.Д. Основные нелинейные и линеаризованные уравнения теории несовершенных ребристых оболочек вращения / Г.Д. Гавриленко // Прикладная механика. – 1983. – 19, № 7. – С. 55-60.
44. Гавриленко Г.Д. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек с одиночной локальной вмятиной / Г.Д. Гавриленко, В.Л. Красовский // Проблемы прочности. – 2004. – № 3. – С. 52-64.
45. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы состояния / Г.Д. Гавриленко. – Киев: Изд. Ин-та математики НАН Украины, 1999. – 190 с.
46. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при наличии неосесимметричных вмятин / Г.Д. Гавриленко, И.Ф. Дудник, И.Ф. Ларионов // Прикладная механика. – 1984. – 20, № 2. – С. 31-35.

47. Гавриленко Г.Д. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии / Г.Д. Гавриленко. – Киев: Наукова думка, 1989. – 176 с.
48. Гашпар Ж. Чувствительность упругих конструкций к несовершенству при потере устойчивости / Ж. Гашпар // Успехи механики. – 1989. – 12, № 4. – С. 43-49.
49. Гемерлинг А.В. Испытание на сжатие цилиндрических оболочек / А.В. Гемерлинг // Строительная механика и расчет сооружений. – 1963. – № 2. – С. 19-23.
50. Гнатюк В.В. Экспериментально-теоретическое исследование влияния неправильностей на устойчивость цилиндрических панелей при нагреве / В.В. Гнатюк, В.В. Улитин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 6. – С. 35-38.
51. Годзевич В.Г. Расчет пологих цилиндрических панелей, подкрепленных шпангоутами, с учетом физической и геометрической нелинейностей / В.Г. Годзевич, Э.В. Годзевич // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 10. – С. 34-37.
52. Годзевич Э.В. Практическая сходимость одного метода интегрирования нелинейного уравнения упруго-пластического изгиба пластины / Э.В. Годзевич // Прикладная механика. – 1976. – 12, № 9. – С. 120-124.
53. Годзевич Э.В. Упруго-пластический изгиб пластин с опорными ребрами / Э.В. Годзевич, В.И. Климанов // Строительная механика и расчет сооружений – 1974. – № 1. – С. 12-14.
54. Гольденблат И.И. Расчеты температурных напряжений в ядерных реакторах / И.И. Гольденблат, Н.А. Николаенко. – М.: Госатомиздат, 1962. – 159 с.
55. Горбачёв К.П. Метод конечных элементов в расчётах прочности / К.П. Горбачев. – Л.: Судостроение, 1985. – 156 с.
56. Городецкий А. С. О сходимости метода упругих решений и метода переменных параметров при решении физически нелинейных задач строительной механики / А.С. Городецкий // Численные методы решения задач строительной механики. – Киев, 1978. – С. 135-140.

57. Горячих А.И. О сходимости метода переменных упругих параметров в теории малых упруго-пластических деформаций / А.И. Горячих // Прочность конструкций летательных аппаратов. – Харьков, 1976. – вып. 3. – С. 1000-1004

58. ГОСТ Р 57837-2017. Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия. – М.: Стандартинформ, 2017. – 36 с.

59. Гоцуляк Е.А. Исследование устойчивости тонкостенных несовершенных оболочек на основе особенностей теории катастроф / Е.А. Гоцуляк, Д.Э. Присов // Архитектура оболочек и прочностной расчёт тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Тезисы докладов Международной научной конференции. Москва 4-8 июня, 2001. – М.: Изд-во РУДК, 2001. – С. 201-202.

60. Гребень Е.С. Метод расчёта прямоугольных в плане пологих оболочек, подкреплённых рёбрами в двух направлениях / Е.С. Гребень // Расчёт пространственных конструкций. Вып. XI. – М.: Госстройиздат, 1969. – С. 132-140.

61. Гребенюк Г.И. Нелинейные задачи строительной механики: Учебное пособие. Электронный ресурс / Г.И. Гребенюк, В.М. Серяков, Н.В. Харинова; Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин). – Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 2019. – 103 с. – ISBN 978-5-7795-0876-6.

62. Гришин Н.В. Влияние начальных неправильностей на колебания пластин и оболочек / Н.В. Гришин, В.С. Калинин // IX Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин: Аннотации докладов. – Ленинград, 1973. – С. 22.

63. Грищак В.З. Асимптотическая формула для критических напряжений в аксиально-сжатых цилиндрических с локальными несовершенствами / В.З. Грищак // Прочность и долговечность конструкций. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 113-120.

64. Гудрамович В.С. Несущая способность неидеальных цилиндрических оболочек с учетом пластических деформаций / В.С. Гудрамович, А.Ф. Де-

менков, С.Н. Конюхов – В кн.: Прочность и надежность элементов конструкций: Сб. научн. тр. Киев: Наук. думка, 1982. – С. 45-48.

65. Гудрамович В.С. Об изгибе и несущей способности неупругих цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами формы и остаточными напряжениями/ В.С. Гудрамович // Докл. АН УССР. Сер. А, 1977. – № 1. – С. 29-32.

66. Гудрамович В.С. Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы / В.С. Гудрамович, Э.Л. Гарт, С.А. Рябоконь // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 102–110.

67. Демидов А.И. Упругопластическое состояние тонких оболочек произвольной формы с прямоугольными отверстиями/ А.И. Демидов// Прикл. механика. – 1981. – 17, № 8. – С. 110-113.

68. Дехтярь, А.С. Несущая способность составных пологих оболочек/ А.С. Дехтярь // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – №6, – С. 21-24.

69. Джан-Темиров К.Е. Устойчивость и закритическое поведение сферических оболочек с начальными несовершенствами / К.Е. Джан-Темиров, Г.И. Гончаровский. – В сб.: Тезисы докладов республиканской НТК.: «Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела». – Харьков, 1989. – С. 93-95.

70. Дзержинский Р.И. Нелинейное деформирование неоднородных пластин и оболочек вращения при комбинированном нагружении: дис. ... канд. техн. наук.: 01.02.04 / Р.И. Дзержинский. – Москва, 2005. – 158 с.

71. Добровольский В.Н. Экспериментальное исследование несущей способности подкрепленных пластин / В.Н. Добровольский, А.П. Колодяжный // Технологические проблемы прочности несущей конструкций: Тр. I Всес. конф., 24-26 сент., 1991. Т. 1. Ч. 2/ Запорож. индустр. ин-т. – Запорожье, 1991. – С. 408-413.

72. Дроздов А.Д. Устойчивость пластин Кармана из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала / А.Д. Дроздов, Т.М. Кузьмина. – Мос-

ковский автомеханический ин-т. Рукопись депонирована № 1119-84Деп.– Москва, 1984. – 15 с.

73. Евкин А.Ю. К вопросу о выборе допускаемого внешнего давления сферической оболочки / А.Ю. Евкин // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1992. – № 1. – С. 48-53.

74. Енджиевский Л.В. Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л.В. Енджиевский. – Красноярск: Изд-во Красноярск ун-та, 1982. – 296 с.

75. Енджиевский, Л. В. Расчет физически и геометрически нелинейных ребристых оболочек в докритическом состоянии / Л. В. Енджиевский, А. П. Деруга, Н. И. Марчук // Пространственные конструкции в Красноярском крае : Межвузовский сборник / Красноярский политехнический институт, Красноярский инженерно-строительный институт. – Красноярск : Красноярский политехнический институт, 1989. – С. 40-46.

76. Жёсткий В.Н. Собственные колебания неразрезных и подкреплённых в одном направлении пластин / В.Н. Жёсткий // Исследования по строительным конструкциям: труды Томск. инж. -строит. ин-та. – Томск, 1968. – т. 14. – С. 21-30

77. Жуков Е.Е. Вариационный приём последовательных приближений к расчёту тонких прямоугольных плит / Е.Е. Жуков // Расчёт тонкостенных пространственных конструкций Под ред. А.Р. Ржаницина. – М.: Стройиздат, 1964. – С. 27 – 35

78. Завьялов В.Н. Инженерный метод расчёта пластинчато-стержневых систем с учётом геометрической нелинейности: дис. ... канд. техн. наук / В.Н. Завьялов; ТИСИ. – Томск, 1970. – 201 с.

79. Заруцкий В.А. Устойчивость продольно-подкреплённых цилиндрических оболочек при кручении / В.А. Заруцкий // Прикладная механика. – 1985. – XXI, № 7. – С. 50-56.

80. Застава М.М. Расчет железобетонных элементов при случайной переменной нагрузке с учетом изменчивости физико-механических характе-

ристик бетона и арматуры: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / М.М. Застава; Одесский инженерно-строительный ин-т. – О., 1992. – 313 с.

81. Зингер И. Колебания и устойчивость подкрепленных оболочек с начальными прогибами – новые результаты/ Иозеф Зингер // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практ. Тр. Лондон. Симп., 31авг.-3сент. 1982. – М., 1991. – С. 348-375.

82. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и выпучивание упруго-пластических систем при сложном нагружении / В.Г. Зубчанинов. – В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Матер. 2 Всес. симп. – Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1986. – С. 10-54

83. Илизаров А.Г. О регулировании усилий в двухпролетных неразрезных пластинах / А.Г. Илизаров, И.А. Чаплинский // Известия вузов. Строительство и архитектура. – Новосибирск, 1976. – №3. – С. 44-52.

84. Ильин В.П. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях / В.П. Ильин, В.В. Карпов – Л., 1986. – 168 с.

85. Ильюшин А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

86. Ищенко С.С. Экспериментальное исследование на малых моделях подкрепленных пластин / С.С. Ищенко // Эксперим. и числ. методы оценки прочн. конструкций. – Калинингр. техн. ин-т рыб. пром-сти и х-ва. – Калининград, 1989. – С. 68-74.

87. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек / В.В. Кабанов. – М.: Машиностроение, 1982. – 253 с.

88. Кабанов В.В. Устойчивость при сжатии за пределом упругости круговой цилиндрической оболочки с осесимметричными начальными прогибами / В.В. Кабанов, Г.И. Курцевич // Прикладная механика. – Киев, 1985. – 21, № 2. – С. 36-42.

89. Кан С.С. Устойчивость оболочек вращения с учетом начальных погибей / С.С. Кан . – В сб.: «Исследования по теории сооружений». – 1967, № XV – С. 74-81.

90. Кантор Б.Я. Вариационно-сегментный метод в нелинейной теории оболочек / Б.Я. Кантор, С.И. Катаржнов – Киев: Наукова думка, 1982. – 136 с.
91. Кантор Б.Я. Закритический изгиб термоупругих равномерно нагруженных круглых пластин / Б.Я. Кантор, Л.М. Афанасьева // Респ. межвед. научно-технический сб. "Самолетостроение и техн. возд. флота", вып. 16. – 1968.
92. Кантор С.Л. Влияние случайных геометрических начальных несовершенств на устойчивость гибких пологих оболочек: автореф. ... дис. канд. техн. наук. / С.Л. Кантор. – Свердловск: УПИ, 1981. – 21 с.
93. Кантор С.Л. Устойчивость прямоугольных несовершенных пологих оболочек / С.Л. Кантор – В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае. Межвузовский сборник КПИ. – Красноярск, 1980. – Вып. 13. – С. 40-47.
94. Карпов В.В. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования/ В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников. – М.:АСВ; СПб.: СПбГАСУ. 2002. – 420 с.
95. Карпов В.В. Теплопроводность и термоупругость пластин и пологих оболочек переменной толщины / В.В. Карпов, В.Н. Филатов. – СПб: СПбГАСУ, 2014.– 180 с.
96. Карпов В.В. Математические модели термоупругости пологих оболочек переменной толщины при учете различных свойств материала / В.В. Карпов, В.Н. Филатов // Вестник гражданских инженеров. – 2006. – № 3(8). – С. 42-45.
97. Кипиани Г.О. Деформативность и устойчивость трёхслойных пластинчатых систем с разрывными параметрами / Г.О. Кипиани, Д.О. Кипиани, Э.П. Мачаидзе // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотация докладов. – Екатеринбург: УрОРАН, 2001. – С. 319-320
98. Киселевский В.Н. Изменение механических свойств сталей и сплавов при радиационном облучении / В.Н. Киселевский. – К.: «Наукова думка», 1977. – 103 с.

99. Кислоокий В.Н. Исследование устойчивости ребристых слабоко-
нических оболочек с большими отверстиями в геометрически нелинейной
постановке / В.Н. Кислоокий, Н.В. Ковальчук, А.Д. Легостаев и др. // При-
кладная механика. – 1984. – 20, № 11. – С. 55-61.
100. Климанов В.И. Нелинейные задачи подкреплённых оболочек /
В.И. Климанов, С.А. Тимашев. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. — 291 с.
101. Климанов В.И. Статика и устойчивость гибких неоднородных
оболочечных систем / В.И. Климанов, В.В. Чупин. – Красноярск: Изд-во
Краснояр. ун-та, 1986. – 182 с.
102. Ковальчук Н.В. Исследование устойчивости ребристых цилиндри-
ческих оболочек с большими отверстиями / Н.В. Ковальчук // Прикладная
механика. – 1978. – 14, № 10. – С. 57-63.
103. Колев Д. Деформировано и напрягнато состояние на ребриста ци-
линдрична панела / Д. Колев. // Годишник на висшите учебни заведения.
Техническа механика, 1974. – т. 9, № 1. – С. 83-91.
104. Колкунов Н.В. Основы расчёта упругих оболочек /
Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.
105. Комозин И.Т. Напряженно-деформированное состояние неоднород-
ных физически и геометрически нелинейных пологих оболочек с учетом попе-
речного сдвига / И.Т. Комозин, И.Н. Преображенский // Исследования по тео-
рии пластин и оболочек. – Казань, изд-во КГУ, 1984. – Вып. 17/1. – С. 125-134.
106. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих
оболочек и методы их решения / М.С. Корнишин. – М., Наука, 1964. – 192 с.
107. Крицкий В.Б. Исследование предельного состояния нелинейно-
деформируемых цилиндрических оболочек из стекла с начальными несовер-
шенствами / В.Б. Крицкий, П.Ф. Золотарев, Ю.М. Родичев // Тезисы докладов
V Всесоюзной конференции по статике и динамике пространственных кон-
струкций – Киев: КИСИ, 1985. – С. 110.

108. Круглов В.П. Несущая способность гибких стальных пластинок с учетом изменения механических свойств материала / В.П. Круглов // Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1979. – № 6. – С. 35-38.
109. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек / В.А. Крысько. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. – 216 с.
110. Крысько В.А. Исследование динамической устойчивости гибкой поллой оболочкой в зависимости от механических и тепловых характеристик / В.А. Крысько, П.Б. Федоров // Прикладная механика. – 1984. – Т. XX, №3. – С. 45-49
111. Кубенко В.Д. О влиянии начальной погиби на собственные нелинейные колебания цилиндрических оболочек / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Т.С. Краснопольская // Прикладная механика. – 1985. – 21, № 3. – С. 46-56.
112. Кузнецов О.В. Модели для расчета частотного спектра неоднородных оболочечных конструкций / О.В. Кузнецов // Известия АН СССР. МТТ, 1987. – № 3. – С. 185-189.
113. Кузнецов С.А. Исследование упругопластического деформирования гибких неоднородных панелей / С.А. Кузнецов, О.В. Старожилова // Проблемы прочности и пластичности. Изд-во Нижегородского ун-та. Нижний Новгород, 2000. – С. 170-174.
114. Кукарина А.И. О влиянии начальных погибей на собственные колебания ребристых цилиндрических болочек / А.И. Кукарина, В.И. Мацнер, Э.Ф. Сивак // Прикладная механика. – 1982. – 18, № 4. – С. 58-63.
115. Кумпяк О.Г. Особенности деформирования железобетонных плит при кратковременном динамическом нагружении / О.Г. Кумпяк, З.Р. Галяутдинов // Проблемы обеспечения безопасности строительного фонда России: материалы III международных академических чтений 20-22 мая 2004 г. – Курск. Гос. Тех. Ун-т. Курск, 2004. – С. 125-132.
116. Куранов Б.А. Исследование устойчивости цилиндрических и сферических оболочек с начальными неправильностями / Б.А. Куранов, А.Т. Турбаивский, Л.В. Бобель, А.Г. Громова // Исследования в области прочности химического оборудования (НПО Криогенмаш). – М., 1985 – С. 21-25.

117. Курылев В.Ф. К постановке задачи об упруго-пластическом деформировании ребристых оболочек / В.Ф. Курылев // Труды МИСИ. – 1969. – № 63: Некоторые задачи сопротивления материалов. – С 142-151.

118. Лайзерах В.М. Корреляционный статистический анализ деформаций сжатых оболочек с начальными неправильностями / В.М. Лайзерах, Б.П. Макаров. // сб.: Теория оболочек и пластин. – М.: Изд-во Наука, 1973. – С. 320-324.

119. Лепик Ю.Р. О несущей способности неоднородных пластин и оболочек / Ю.Р. Лепик // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963. – № 4. – С. 167-171.

120. Липкин В.И. Экспериментальное исследование прочности, устойчивости и колебаний пластин со ступенчато меняющейся жесткостью: дис. ... канд. техн. наук. / В.И. Липкин; Том. гос. архит.-строит. ун-т. – Томск, 1971. – 172 с.

121. Липовский Д.Е. Статистическая оценка влияния случайных возмущений на устойчивость ребристых оболочек по данным экспериментальных исследований / Д.Е. Липовский, Г.М. Алтухер, В.М. Коц и др. // Расчёт пространственных конструкций, – 1977. – № 17. – С. 32-34.

122. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.

123. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных тел / Е.В. Ломакин. – М., 1980. – 64 с.

124. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики / П.А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

125. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А.И. Лурье. – М.; Л., Гостехиздат, 1947. – 252 с.

126. Ляхович Л.С., Черняк А.М. К расчёту плитно-ребристых конструкций / Л.С. Ляхович, А.М. Черняк // Исследования по строительным конструкциям: труды Томск. Инж.-строит. Ин-та. – Томск, 1966. – т. 12. – С. 74-76

127. Макаров Б.П. Экспериментальное исследование деформаций цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами // в сб. Расчеты на прочность. – М.: Машгиз, 1969. – № 13.

128. Мандритта Н.И. Исследование работы плитных и плитно-балочных перекрытий в упругой и упруго-пластической стадии / Н.И. Мандритта // Труды МАДИ, 1972. – вып. 46: Мосты и строительные конструкции. – С. 7-20.

129. Маневич Л.М. Экспериментальное исследование влияния начальных возмущающих факторов на устойчивость гладких цилиндрических оболочек различных масштабов при осевом сжатии / Л.М. Маневич, А.М. Мильцын, В.И. Мосаковский и др. // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1968. – № 5. – С. 180-184.

130. Марченко В.А. Динамика неоднородных пологих сферических оболочек: автореф. ... дис. канд. техн. наук: 05.23.17 / В.А. Марченко; Самарская гос. архит. стр. акад. – Самара, 2006. – 19 с.

131. Марчук Н.И. К расчету гибких упруго-пластических оболочек / Н.И. Марчук // Труды КПИ, Вып. XIII: Пространственные конструкции в Красноярском крае. – Красноярск, 1980. – С. 36-39.

132. Матченко Н.М. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников // Инж. журнал. Механика твёрд. тела. – 1968. – №6. – С. 108-110.

133. Милейковский И.Е. Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек / И.Е. Милейковский, И.П. Гречанинов // Расчёт пространственных конструкций. Вып. XII – М.: Стройиздат., 1969. – С. 168-177.

134. Михайлов Б.К. Влияние подкреплений на нелинейную деформацию оболочки с прямоугольным отверстием / Б.К. Михайлов, С.В. Спиридонов, В.Г. Якунчихин // тр. 16 Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Нижний Новгород, 21-23 сент., 1993. – т. 2. – Н. Новгород, 1994. – С. 152-154.

135. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с

136. Мкртчян Р.Е. Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия / Р.Е. Мкртчян// Изв. АН Арм.ССР. Механика. – 1970. – Т. 23, №5. – С. 37-47.

137. Моисеенко М.О. Влияние симметричной начальной погиби контура на напряженно-деформированное состояние подкрепленных гибких пластин с учетом физической нелинейности / М. О. Моисеенко, О.О. Морозова, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – № 4. Часть 4. – С. 1634-1635.

138. Моисеенко М. О. Влияние температурного воздействия на напряженно-деформированное состояние подкреплённой пластины с начальным прогибом / М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2016. – № 5(58). – С. 121-128.

139. Моисеенко М.О. Деформируемость двухпольной гибкой пластины с начальным прогибом при неравномерном нагреве / М.О. Моисеенко, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – № 5(274). – С. 21-27.

140. Моисеенко М.О. Изгиб за пределом упругости двупольной прямоугольной гибкой пластины с симметричной начальной погибью, подкрепленной центральным ребром жесткости / М.О. Моисеенко, О.Н. Попов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 6(257). – С. 40-44.

141. Моисеенко М.О. Изменение величин напряжений, прогибов в пластине с начальным прогибом под действием неравномерного температурного поля / М.О. Моисеенко, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева, А.В. Гордиенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – № 2(277). – С. 26-31.

142. Моисеенко М.О. Исследование на прочность и жесткость с учетом нелинейности несимметрично нагруженной пластинчато-стержневой системы с начальным прогибом / М.О. Моисеенко, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – № 4(267). – С. 10-17.

143. Моисеенко М.О. Метод расчета разномодульных прямоугольных тонкостенных элементов конструкций с разрывными параметрами с учетом нелинейностей: дис. ... канд. техн. наук / М.О. Моисеенко; Том. гос. архит.-строит. ун-т. – Томск, 2004. – 180 с.

144. Моисеенко М.О. Напряженно-деформированное состояние гибкой пластины с начальным прогибом контурного ребра за пределом упругости / М.О. Моисеенко, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 5(244). – С. 50-55.

145. Моисеенко Р.П. Оптимизация ребристых тонких пластин при заданной первой частоте собственных колебаний: монография / Р.П. Моисеенко; под ред. Н. Н. Белова; Томский гос. архитектурно-строит. ун-т. – Томск : Изд-во Томского гос. архитектурно-строит. ун-та, 2007. – 142 с.

146. Мусабаев Т.Т. Расчет цилиндрических и шаровидных подземных сооружений в неоднородном нелинейном массиве горных пород при различных чрезвычайных воздействиях / Т.Т. Мусабаев, Т.К. Каюнов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 1. – С. 20-25.

147. Муштари Х.М. Нелинейная теория оболочек / Х.М. Муштари. – М.: Наука, 1990. – 223 с.

148. Муштари Х.М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности // в кн.: Нелинейная теория оболочек. – М.: Наука, 1990. – С. 142-150.

149. Мяченков В.И. Методы и алгоритмы расчёта пространственных конструкций на ЭВМ ЕС/ В.И. Мяченков, В.П. Мальцев – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.

150. Немировский Ю.В. Расчет упругопластического деформирования гибких пластин со сложными структурами армирования / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : труды XXI Всероссийской конференции, Кемерово, 30 июня – 02 июля 2009 года / Российский нац. ком. по теоретической и прикладной механике, Ин-т теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО

РАН, Кузбасский гос. ун-т ; под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Параллель, 2009. – С. 175-182.

151. Овчинников И.Г. К определению напряженно-деформированного состояния и долговечности цилиндрических оболочек с учетом коррозионного износа / Овчинников И.Г. // Строит. мех. и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 13-17.

152. Овчинников И.И. Расчет напряженно-деформированного состояния и поврежденности армированной пластины в хлоридсодержащей среде / И.И. Овчинников // Строит. мех. инж. конструкций и сооруж. – 2009. – № 3. – С. 3-9.

153. Ольшак В. Неупругое поведение оболочек / В. Ольшак – М.: Мир, 1969. – 149 с.

154. Пахомов В.Л. Нелинейный расчет цилиндрических конструкций на радиационное воздействие: автореф. ... дис. канд. техн. наук: 01.02.03 / В.Л. Пахомов; МИСИ. – М., 1988. – 16 с.

155. Петров В.В. Деформирование элементов конструкций из нелинейного разномодульного неоднородного материала / В.В. Петров, И.Г. Овчинников, В.К. Иноземцев. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 1989. – 160 с.

156. Петров В.В. Итерационные методы решения нелинейных задач строительной механики / В.В. Петров, Р.В. Мищенко, Д.А. Пименов // Вестник Волжского регионального отделения Российской академии архитектуры и строительных наук. – 2016. – № 19. – С. 158-165.

157. Петров В.В. Математическое моделирование долговечности тонкостенных пространственных конструкций в агрессивной среде / В.В. Петров // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Т. 12. № 3. – С. 114-128.

158. Петров В.В. Влияние неоднородности материала и переменных геометрических характеристик на НДС изгибаемых конструкций / В.В. Петров, Р.В. Мищенко, Д.А. Пименов // Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2017 году:

Сборник научных трудов Российской академии архитектуры и строительных наук. – Москва: Издательство АСВ, 2018. – С. 394-405.

159. Петров, В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

160. Петров В.В. Расчет неоднородных по толщине оболочек с учётом физической и геометрической нелинейностей / В.В. Петров // АСADEMIA. Архитектура и строительство. – 2016. – № 1. – С. 112-117.

161. Петухова И.Я. Численный анализ двух методов линеаризации упруго-пластических задач теории пологих ребристых оболочек / И.Я. Петухова // труды КПИ, Вып. X: Пространственные конструкции в Красноярском крае. – 1977.– С. 66-73

162. Поляк Б.Т. Стандартная программа минимизации функции многих переменных / Б.Т. Поляк, В.А. Скоков // Серия: Стандартные программы решения задач математического программирования. М.: Изд-во МГУ, 1967. – вып. 4. – 68 с.

163. Попов О.Н. Анализ влияния начальной погиби на напряженно-деформированное состояние несимметрично нагруженных прямоугольных гибких пластин, подкреплённых центральным ребром, с учетом физической нелинейности / О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева, М.О. Моисеенко // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сборник докладов, Казань, 20–24 августа 2015 года / Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. – С. 3095-3096

164. Попов О.Н. Влияние симметричной общей начальной погиби на напряженно-деформированное состояние и устойчивость пологих цилиндрических оболочек / М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчет сооружений. – М.: ФГУП НИЦ «Строительство», 2010. – № 4. – С. 34-39.

165. Попов О.Н. Напряженно-деформированное состояние гибкой пластины с начальным прогибом контурного ребра за пределом упругости / О.Н. Попов,

М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – № 5(244). – С. 50-55.

166. Попов О.Н. Нелинейные задачи ребристых оболочек: монография / О.Н. Попов, А.П. Малиновский, М.О. Моисеенко – Томск : Изд-во Том. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2004. – 171 с.

167. Попов О.Н. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости / О.Н. Попов, А.П. Малиновский, М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2013. – № 4(41). – С. 127-142.

168. Попов О.Н. Расчет прямоугольных пластин и пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, с учетом физической и геометрической нелинейностей: дис. ... канд. техн. наук / О.Н. Попов; Том. гос. архит.-строит. ун-т, – Томск, 1983. – 211 с.

169. Постнов В.А. Метод суперэлементов в расчётах инженерных сооружений / В.А. Постнов, С.А. Дмитриев, Б.К. Елтышев, А.А. Родионов– Л.: Изд-во Судостроение, 1979. – 287 с.

170. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – Киев: Наукова Думка, 1987. – 342с.

171. Потапкин А.А. Теория и расчет стальных и сталежелезобетонных мостов на прочность с учетом нелинейных и пластических деформаций / А.А. Потапкин. М.:Транспорт, 1972. – 192 с.

172. Потапов А.Н. Использование алгебраической проблемы квадратичного вида в задачах строительной механики: анализ и перспективы подхода / А.Н. Потапов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2021. – № 3. – С. 24-37.

173. Потапов В.Д. О влиянии случайных начальных искривлений поверхности на устойчивость вязкоупругих оболочек / В.Д. Потапов, В.И. Медник // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1983. – № 25. – С. 108-114.

174. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями / И.И. Преображенский. – М.: Машиностроение, 1981. – 191 с.

175. Рассудов В.М. Термоупругие задачи равновесия, устойчивости и колебаний элементов конструкций и приборов в виде ортотропных пологих оболочек и пластинок: дисс. ... докт. техн. наук: 01.02.06 / В.М. Рассудов; Ленингр. политехн. ин-т. – Ленинград, 1978. – 422 с.

176. Рогалевич В.В. Гибкие пологие оболочки постоянной толщины при начальном изгибании опорного контура / В.В. Рогалевич, С.Д. Корсаков, Г.Е. Пределина // Известия вузов. Стр-во. – 1993. – № 1. – С. 22-36.

177. Санжаровский Р.С. Теория расчета неупругих податливых сдвигам железобетонных оболочек и пластин с трещинами / Р.С. Санжаровский, Т.Т. Мусабаев // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Изд-во Нижегородского ун-та. Нижний Новгород 2000. – С. 68-77.

178. Саченков А.В. Влияние начальных неправильностей на устойчивость тонких оболочек / А.В. Саченков, В.Г. Выборнов // сб.: Исслед. по теор. пластин и оболочек. Вып. 3. – Казань, 1965. – С. 24-34.

179. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017614725 (RU). Расчёт тонкостенных конструкций с начальным прогибом / О.Н. Попов, М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева. – №2017611633; заявл. 28.02.2017; опубл. 26.04.2017.

180. Семёнов П.К. Расчёт нелинейно-упругих пластинок на механические и температурные воздействия // Механика конструкций, работающих при воздействии агрессивных сред.– Саратов: СПИ, 1987. – С. 43-46.

181. Силивра С.А. О подкреплении контура выреза в ортотропных оболочках вращения с учетом физической и геометрической нелинейностей / С.А. Силивра // труды 15 науч. конф. мол. ученых ин-та механики АН УССР, Ч. 1 – Киев, 1990. – С. 124-128.

182. Синева Н.Ф. Метод Ритца в нелинейных задачах конструкций с наведенной неоднородностью материала // Долговечность материалов и элементов конструкций в агрессивных и высокотемпературных средах. – Саратов. политехн. ин-т. – Саратов, 1995.- С.76-96.

183. Стрельбицкая А.И. Изгиб прямоугольных пластин за пределом упругости / А.И. Стрельбицкая, В.А. Колгадин, С.И. Матошко. – Киев: Наукова думка, 1971. – 244 с.

184. Стрельбицкая А.И. Работа гибких пластин за пределом упругости при однородных граничных условиях/Стрельбицкая А.И. // Прикладная механика. – 1971.– т. 7, №12. – С. 71-81.

185. Стрельбицкая А.И. Упругопластическая работа пологих оболочек при равномерно распределённой нагрузке / А.И. Стрельбицкая // Прикладная механика. – 1975. – т. 11, №10. – С. 25-35.

186. Стрельбицкий М.В. Влияние физической и геометрической нелинейностей на напряженно-деформированное состояние составной конструкции из цилиндрических оболочек и шпангоутов при нагружении внутренним давлением / М.В. Стрельбицкий / Моск. гос. строит. ун-т. М., 1997. – 35 с. Деп в ВИНТИ 16.05.97. № 1644-B97.

187. Тамразян А. Г. Термоползучесть пологих железобетонных оболочек и плоских пластин при высоких температурах / А.Г. Тамразян, А.С. Кожанова // Промышленное и гражданское строительство. – 2015. – № 10. – С. 15-20.

188. Тамуров Н.Г. Закон упругости для изотропного материала с различными характеристиками при растяжении и сжатии / Н.Г. Тамуров, Г.В. Туровцев // Динамика и прочность тяжёлых машин. – Днепропетровск, 1983. – С. 76-80.

189. Теребушко О.И. К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек / О.И. Требушко // Расчёт пространственных конструкций, в. VII. – М.: Госстройиздат, 1962. – С. 119-134.

190. Теребушко О.И. Устойчивость и закритическая деформация оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами / О.И. Требушко // Расчет пространственных конструкций, т. IX. – М.: Госстройиздат, 1964. – С. 131-160.

191. Теребушко О.И. Закритическая деформация несовершенных подкрепленных панелей при взаимодействии форм потери устойчивости / О.И. Теребушко, А.В. Адуевский // Прикладная механика. – 1984. – 20, № 9. – С. 49-53.

192. Терегулов И.Г. Изгиб и устойчивость пологой цилиндрической панели в условиях ползучести при наличии начальных несимметричных прогибов / И.Г. Терегулов, Д.С. Сафиуллин // XXXV науч. конф. по итогам научн. исслед. и внедрению их в производство: программа – тезисы. – Казань, 1983. – С. 10.

193. Тимашев С.А. Устойчивость подкрепленных оболочек / С.А. Тимашев. – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.

194. Тимашев С.А. Устойчивость цилиндрических оболочек с конструктивными отклонениями от теоретической формы // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Межвузовский сборник КПИ. – Красноярск, 1972. – Вып. V. – С. 40-47.

195. Толоконников Л.А. Обобщение закона упругости / Л.А. Толоконников // Технология машиностроения. Вып. 20. – Тула, 1970. – С. 148-156.

196. Трепутнева Т.А. Влияние начального прогиба на перемещения и деформации гибкой подкреплённой пластины / Т.А. Трепутнева // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2016. – № 3(56). – С. 121-128.

197. Трепутнева Т.А. Исследование напряженно деформированного состояния подкрепленных пластин с учетом изменения свойств материала от воздействия температуры / Т.А. Трепутнева, Д.С. Бухтояров, Е.В. Глыбина [и др.] // Перспективные материалы в технике и строительстве (ПМТС-2013) : Материалы Первой Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием, Томск, 21–25 октября 2013 года. – Томск: Томский государственный архитектурно-строительный университет, 2013. – С. 155-158.

198. Трепутнева Т.А. Напряжённо-деформированное состояние подкреплённых тонкостенных элементов конструкций / Т.А. Трепутнева, М.О. Моисеенко, О.Н. Попов [и др.] // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2021. – Т. 23. – № 4. – С. 69-78.

199. Трепутнева Т.А. Расчёт подкреплённых пластин с начальным прогибом / Т.А. Трепутнева, О.Н. Попов, М.О. Моисеенко // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Сборник трудов X всероссий-

ской научной конференции, , 03-05 сентября 2018 г, г. Томск. – Томск: Томский государственный университет, 2018. – 231 с. – С. 142-144

200. Трещев А.А. Упругопластическая деформация тонкой полой оболочки из разносопротивляющихся дилатирующих материалов при конечных прогибах / А.А. Трещев, А.Н. Забелин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 4. – С. 63–68.

201. Фиалко С.Ю. Неупругая устойчивость тонкостенных подкрепленных призматических складчатых систем с начальными несовершенствами формы / С.Ю. Фиалко // Устойчивость и пластич. в мех. деформир. тверд. тела: Матер. 3 Симп., Тверь, 3-5 сент., 1992. Ч. 2. – Тверь, 1993. – С. 53-57.

202. Фиалко С.Ю. О несущей способности несовершенных подкрепленных прямоугольных пластинок, подверженных действию сжимающих торцевых нагрузок / С.Ю. Фиалко // Прикл. механика. – 1991. – 29, № 2. – С. 73-80.

203. Фурсов В.В. Учет физической нелинейности при расчете на изгиб стальных ортотропных плит с различными типами подкрепляющих ребер / В.В.Фурсова, В.С. Данков // Строительные конструкции. – М., 1977. – № 29. – С. 19-22.

204. Чернышов В.Н. Обобщенные вариационно-разностные уравнения для исследования гибких ребристых оболочек с начальными несовершенствами / В.Н. Чернышов, Н.П. Абовский, А.С. Павлов // Пространственные конструкции в Красноярском крае: межвузовский сборник КПИ. – Красноярск, 1975. – Вып. VIII. – С. 82-104.

205. Черняк А.М. Построение функций перемещений для прямоугольной пластинки от смещения кромки в её плоскости // Стр-во и архит: труды Томск. инж. строит. ин-та, 1971. – т.16:.. – С. 39-44.

206. Шевелёв Л.П. Основы теории устойчивости оболочек за пределом упругости / Л.П. Шевелёв. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. – 168 с.

207. Школьный С.М. Терморadiационная ползучесть оболочек вращения и составных осесимметричных оболочечных конструкций с учетом деформаций радиационного распухания. (Обзор). / С.М. Школьный. – Харьков: ХПИ. – Деп. в УкрНИИНТИ 22.09.89. – 26 с.

208. Этоков В.И. Влияние подкреплений на устойчивость несовершенной цилиндрической оболочки / В.И. Этоков // Прикладная механика. – 1977. – 13, № 1. – С. 54-60.
209. Этоков В.И. Исследование устойчивости несовершенных ребристых цилиндрических оболочек / В.И. Этоков // Прикладная механика. – 1979. – 15, № 12. – С. 70-76.
210. Яковлев А.А. Упругопластический расчет судовых подкрепленных пластин методом конечных разностей / А.А.Яковлев // Теория и прочность ледокольного корабля. –Горький, 1980. – № 2. – С. 45-46.
211. Яковлев А.А. Экспериментальное исследование изгиба подкрепленных пластин / А.А.Яковлев // Прочность и теория корабля: труды Горьковский политехн. ин-т. – Горький, 1974. – т. XXX, вып. 13. – С. 64-70.
212. Якушев В.Л. Устойчивость тонкостенных конструкций с учетом начальных несовершенств / В.Л. Якушев // Строительная механика и расчет сооружений, 2010.– № 1 – С. 43-46.
213. Янг Т. Применение метода конечных элементов для исследования больших прогибов пластин с начальными прогибами // – Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – т.9, №8. – С. 38-44.
214. Alexandrov S. Thermal effects on the development of plastic zones in thin ax-isummetric plates / S. Alexandrov, N. Alexandrova // J. Stain Anal. Eng. Des. - 2001. -Vol. 36. - P. 169-176.
215. Altenbach Holm. Moglichkeiten der Modellierung des mechanischen Werkstoffverhaltens / H. Altenbach // Wiss. Z. Techn. Univ. Otto von Guericke, Magdeburg. – 1990. – 34, № 7. – S. 6-13.
216. Amold M.A. Koiter`s elastic stability of solids and structures / M.A. Amold, van der Heijden / New York : Cambridge University Press, 2009. – 230 p.
217. Aritomi M. Free vibration characteristics of eccentrically stiffened square plates with an initial deflections. Lst report. Theoretical analyses/ M. Aritomi, S. Sumi, K. Kiroka, M. Toya // Nixon kikai gakkai ronbunshu. C. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. – 1993. – 59, № 558. – С. 322-329.

218. Dumir P.C. Axisymmetric static and dynamics buckling of orthotropic shallow spherical caps with initial imperfections / P.C. Dumir, M.L. Gandhi, Y. Nath // *Rozprawy Inzynierskie. Engin. Trans.* 32, 2. – 1984. – P. 211-223.
219. Gavrilenko G.D. Effect of localized imperfections on the critical loads of ribbed shells / G.D. Gavrilenko, V.I. Matsner // *International Applied Mechanics.* – 2010. – Vol. 46. – No 7. – P. 771-775.
220. Gavrilenko G.D. Stability of imperfect cylindrical shells / G.D. Gavrilenko // *Strength of Materials.* – 2008. – Vol. 40. – No 4. – P. 463-468.
221. Gavrilenko G.D. The stability and load-carrying capacity of incomplete shells / G. D. Gavrilenko // *International Applied Mechanics.* – 2000. – Vol. 36. – No 7. – P. 866-887.
222. Hirokazu Okamyro, Elasto-plastic analysis of rehtanqular steel plates with consideration of their large deflections and ribstiffened construction / O. Hirokazu, J. Huminovi // *Trans. Jap. Coc. Civ. Eng.*, 1972. – vol. 3, № 2. – P. 170-171.
223. Huyan Xraazhi. Nonlinear analysis of imperfect metallic and laminated cylinders under bending loads / Huyan Xraazhi, Simites George J.// 36 th AIAA/ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Struct , Struct. Dyn., and Mater. Conf. And AIAA/ASME Adapt. Struct. Forcem, New Orleans, da, Apr. – 1—13, 1995. Collect. Techn. Pap. Pt. 3 – Washington, 1995. – P. 1645-1653.
224. Karman Th., Tsien H.S. The buckling of thin eglindrical shells under axial commpression. *J. Acron. Sci.*, 8, 1941. – №8. – P. 303-312.
225. Khaing M. Calculation of thermal stresses in the elastoplastic plate heated by local heat source / M. Khaing, A.V. Tkacheva // *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences.* – 2018. – Vol. 12, No:8.
226. Marshall I.H. The effects of shape imperfections on the mechanical characteristics of GRP plates / I.H. Marshall, J. Rhodes – «Mech. Struct. Media. Proc. Int. Symp. Mech. Behav. Struct. Media, Ottawa, May 18-21, 1981. Pt B». Fmsterdam e.a., 1981. – P. 437-452.

227. McConnel R.E. The buckling behaviour of some single layer, shallow lattice domes/ R.E. McConnel, F.A. Fathelbab, D. Hatzis – «Shells, Membranes and Space Frames. Proc. IASS Symp. Membrane Struct. and Space Frames, Osaka, 15-19 Sept., 1986. Vol. 3». Amsterdam e.a., 1986. – P. 97-104.

228. Moiseenko M. Nonlinear calculation of a system of rectangular plates with due regard to changes in the mechanical properties of the material / M. Moiseenko, A. Malinovskiy, O. Popov, T. Treputneva // AIP Conference Proceedings : Proceedings of the II All-Russian Scientific Conference of Young Scientists "Advanced Materials in Technology and Construction", Tomsk, 06–09 октября 2015 года. – Tomsk: American Institute of Physics Inc., 2016. – P. 040012.

229. Moller B. Berechnung orthotroper Stahlfahrbahnplatten im nichtlinearen bereich mit Hilfe der finiten Elemente/ B. Moller// Bauplanung-Bautechnik, 26 (1972), H. 3. – P. 121-124.

230. Ocean Y. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder / Y. Ocean, U. Gamer // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90. – P. 61-80.

231. Papadopoulos V. Buckling analysis of imperfect shells with stochastic non-Gaussian material and thickness properties/ V. Papadopoulos, G. Stefanou, M. Papadrakakis// International Journal of Solids and Structures/ Volume 46 (14-15), – 2009. – P. 2800-2808.

232. Perzyna P. Problems of thermoplasticity / P. Perzyna, A. Sawcuk // Nuclear engineering and design, North-Holland Publishing Company, 24 (1973). – P. 1–55.

233. Peterson W.S. Diskussion on the paper: Full range analysis of eccentrically stiffened plates by Anton W/ Wegmuller/ W.S. Peterson, C.M. Kostem, J.M. Kulicki // J. Struct. Div. Amer. Soc. Civ. Eng., 1974. – vol. 100, № 9. – P. 1980-1981.

234. Pinkney R.B. Use of measured imperfections to predict the buckling of axially loaded cylindrical shells / R.B. Pinkney, D.W Murray, M.J. Stephens, G.L. Kulak // Can. J. Civ. Eng. – 1983. – 10, № 4. –P. 662-669.

235. Sanjarovski R.S. Calculation of reinforced concrete envelopes and plates with cracks / R.S. Sanjarovski, T.T. Musabaev // Appl. Mech. In the Americas. 1998. – V. 7. – P. 939-942.

236. Sassi S. Effects of initial geometric imperfections on the interaction between forced and parametric vibrations / S. Sassi, G.L. Ostiguy // J. Sound and Vibr. – 1994. – 178, № 1. – P. 41-54.

237. Simits G.J. Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: A review / G.J. Simits // Nonlinear Anal. and NDE Compos. Mater. Vessels and Components: Pressure Vessels and Pip. Conf. and Exhib., Chicago, Ill., July 20-24, 1986. New York, N.Y., 1986. – P. 1-11.

238. Sumi S. Free nonlinear vibrations of stiffened rectangular plates with an initial curvature. Part 2. Theoretical analyses of clamped plate / S. Sumi // Нухон. Кокку умю гаккайси.=J. Jap. Soc. Aeronaut. And Space Sci. – 1990. – 38, №439. – P. 405-413.

239. Treputneva T. Asymmetrically loaded supported plate with initial deflection with limited plastic deformations / T. Treputneva, O. Popov, M. Moiseenko, R. Moiseenko // AIP Conference Proceedings, Tomsk, 22–25 ноября 2016 года. – Tomsk: American Institute of Physics Inc., 2017. – P. 040004.

240. Treputneva T. Mathematical method of design of reinforced plates with initial deflection / T. Treputneva, O. Popov, M. Moiseenko, M. Savintseva // AIP Conference Proceedings: Proceedings of the X All-Russian Conference "Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics", FAPMM 2018, Tomsk, 03–05 сентября 2018 года. – Tomsk: American Institute of Physics Inc., 2019. – P. 020019.

241. Treputneva T. Temperature influence on strain state of a flexible plate / T. Treputneva, O. Popov, M. Moiseenko [et al.] // MATEC Web of Conferences, Tomsk, 25–27 октября 2017 года. – Tomsk: EDP Sciences, 2018. – P. 01015.

242. Wang Hu The large deflection equations of stiffened laminated composite conical shells / Wang Hu, Wang Tsunkuei // Ханкын сюэбао = Acta aeronaut. Et astronaut. Sin. A. – 1990. – 11, № 5. – P. A271-A267.

243. Webb S.E. Large-deflexion elasto-plastic behaviour of diskretely stiffened plates / S.E. Webb, P.J. Dowling //Proc. Inst. Civ. Eng., 1980. – № 69. – P. 375-401.

244. Wegmuller A.W. Fullrange analysis of eccentrically stiffened plates / A.W. Wegmuller // J. Struct. Div. Amer. Soc. Civ. Eng., 1974. – vol. 100, № 1. – P. 143-159.

245. Yakushev V.L. Non-linear problems of shell stability/ Proc. of the 1st South African Conf. On Applied Mechanics (SACAM) '96, 1-5 July, 1996. Midrand, South-Africa. P. 252-259.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017614725

Расчет тонкостенных конструкций с начальным прогибом

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Томский государственный архитектурно-строительный университет» (ТГАСУ) (RU)*

Авторы: *Попов Олег Николаевич (RU), Моисеенко Маргарита Олеговна (RU), Трепутнева Татьяна Алексеевна (RU)*



Заявка № 2017611633

Дата поступления 28 февраля 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 26 апреля 2017 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение 2 Документы, подтверждающие внедрение результатов диссертационной работы



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

пл. Соляная, 2, г. Томск, 634003, телефон (3822) 65-32-61, факс (3822) 65-24-22, e-mail: cano@tsuab.ru
ОКПО 02069295690001, ОГРН 1027000882886 ИНН/КПП 7020000080/701701001

19.10.2021 № 2391-05-11

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по учебной работе

О.Г. Волокитин



«19» октября 2021 г.

СПРАВКА
о внедрении результатов диссертационной работы
Трепутневой Татьяны Алексеевны

Результаты диссертационной работы Трепутневой Т.А. «Численно-аналитический метод расчёта подкреплённых пластин и пологих оболочек с начальным прогибом при силовом и температурном воздействиях» используется в ФГБОУ ВО «Томский государственный архитектурно-строительный университет» при изучении дисциплин:

- «Теория расчета пластин и оболочек» (для программ специалитета, специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»);
- «Нелинейные задачи строительной механики» (для программ магистратуры и специалитета, направление «Строительство», направленность 8.04.01.24 «Современные технологии проектирования и строительства зданий и сооружений»; специальность 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»).

Декан строительного факультета,
к.т.н., профессор


А.П. Малиновский

ООО Научно-техническая фирма «Обследование и усиление сооружений»
ООО НТФ «ФОБУС-2000»
634009, г. Томск, ул. Пролетарская, 38в, каб. 33-35
Тел. (3822) 59-78-41, E-mail: a_kraynov@mail.ru
ОГРН, дата регистр. 1027000907130, 20октября 1999г.,
ИНН/КПП 7017007617/ 701701001

№ _____

В диссертационный совет
24.2.414.01 при ФГБУ ВО
«Томский государственный
архитектурно-строительный
университет»

СПРАВКА о внедрении

ООО Научно-техническая фирма «Обследование и усиление сооружений» проводит работы по капитальному ремонту силосных сооружений в Аграрном комплексе ООО «СИБАгро». Основными изнашиваемыми элементами в таких конструкциях являются стальные листы, образующие конусные и пирамидальные фигуры. Для работы в нормальных условиях, как правило, применяют в качестве основного элемента – стальной лист, достаточно большой толщины.

Предоставленный Трепутневой Т.А. метод расчёта и результаты исследования диссертационной работы были применены при проектировании силосных сооружений как отдельных элементов. Учёт нелинейностей и установка рёбер жёсткости позволили снизить толщину листа и, соответственно, снизить общую массу конструкции (свыше 10%).

Генеральный директор
ООО НТФ «ФОБУС-2000»



А.В. Крайнов